АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ III
ВЫПУСК
3

U. of ILL. LIBRARY
JUL 20 1971
CHICAGO CIRCLE

1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1958

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ

Бернштейн С. Н., Гнеденко Б. В., Золотарев В. М. (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С., Линник Ю. В., Прохоров Ю. В.*** (зам. гл. редактора), ***Сарымсаков Т. А., Смирнов Н. В., Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

Скороход А. В. Предельные теоремы для процессов Маркова 217
Skorohod A. V. Limit Theorems for Markov processes 264
Зингер А. А. Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитические свойства распределений 265
Zinger A. A. Independence of quasi-uolynomial statistics and analytical properties of distributions 284
Монин А. С. Структура атмосферной турбулентности 285
Monin A. S. The structure of atmospheric turbulence 317
Воробьев Н. Н. Ситуации равновесия в биматричных играх 318
Vorobjev N. N. Equilibrium points in bimatrix games 331
Волконский В. А. Случайная замена времени в строго марковских процессах 332
Volkonski V. A. Random substitution of time in strong Markov processes . . 350

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Беляев Ю. К. О неограниченности выборочных функций гауссовских процессов. 351
Beljaev Yu. K. On the unboundedness of the sample functions of Gaussian processes 354
Кордонский Х. Б. Об одном случае распределения числа дефектных единиц в партиях изделий 354
Kordonski H. B. On a distribution for the number of spoiled articles in shipments 358

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу Р. Балльё «Теория вероятностей и статистический анализ (элементы)». *Прохоров Ю. В.* 359
Рецензия на книгу Г. Рихтер «Теория вероятностей». *Прохоров Ю. В.* . . . 359

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ; Мех.-матем. факультет, тел. В 9-18-01

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1958

ЦП -Обменный фонд
1963 г. Биксина. №63

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА

А. В. СКОРОХОД

В настоящей работе общие предельные теоремы для случайных процессов, полученные в [1], применяются к процессам Маркова. Различные частные случаи предельных теорем для процессов Маркова содержатся в работах А. Я. Хинчина [2], И. И. Гихмана [3]—[6], Маруяма [7], в заметке автора [8]. Сходные результаты для процессов с независимыми приращениями содержатся в статьях Ю. В. Прохорова [9] и автора [10].

В работах [2]—[7] рассматривался случай непрерывных (диффузионных) процессов. Сходимость к однородным марковским процессам, имеющим разрывы, рассматривалась в заметке автора [8] *.

В настоящей статье рассматривается случай марковских процессов, не имеющих разрывов второго рода. Статья распадается на две довольно обособленные части. В первой (§§ 1—3) обобщаются условия Е. Б. Дынкина [16] и Кини [17] отсутствия у марковских процессов разрывов второго рода и выводятся общие предельные теоремы для сходимости распределений J_1-непрерывных функционалов, причем сходимость конечномерных распределений процессов, как и в [1], постулируется, однако другие условия выражаются в терминах переходных вероятностей процесса, а не через всю совокупность конечномерных распределений, как в [1].

Во второй части (§§ 4—8) к предельным теоремам для марковских процессов применяется метод полугрупп линейных операторов [11], получивших довольно широкое применение в теории марковских процессов в основном благодаря работам В. Феллера и Е. Б. Дынкина (см. напр. [12], [13]). Благодаря возможности сведения неоднородных марковских процессов к однородным (см. [14]), метод полугрупп может применяться и к неоднородным марковским процессам. Этому вопросу посвящен § 8, где рассматривается сходимость последовательности цепей Маркова к неоднородному многомерному диффузионному процессу.

Методы теории полугрупп позволяют получать условия сходимости конечномерных распределений и в комбинации с результатами § 3 дают условия сходимости распределений J_1-непрерывных функционалов. Эффективность этих условий явно не достаточна, однако положительным фактом можно считать то, что основная трудность заключается в проверке

* Как оказалось, наложенные в [8] условия не достаточны для выполнения сформулированного там утверждения, но если условие слабой сходимости инфинитезимальных операторов, наложенные в [8], заменить условием равномерной сходимости инфинитезимальных операторов, то, как доказано в § 7 настоящей статьи, утверждение теоремы, сформулированной в [8], будет справедливо.

58
100-483/2

условий, накладываемых на предельный процесс, а не на всю последовательность процессов. Неокончательность и громоздкость большинства формулировок, по-видимому, вызвана тем обстоятельством, что еще нет окончательной классификации марковских процессов и не изучены полностью соответствующие им инфинитезимальные операторы.

Во время работы над этой статьей автор неоднократно беседовал с Е. Б. Дынкиным и И. И. Гихманом относительно затронутых в статье вопросов. Пользуюсь случаем выразить им глубокую признательность за оказанное внимание.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Общее определение марковского процесса, содержащееся например в [15], стр. 79, мало пригодно для изучения свойств процесса, поэтому мы будем исходить, как это и делается обычно (см. напр. [15], стр. 232), из определения переходной функции процесса и через нее уже определять сам процесс.

1.1. Определение. Пусть X — некоторое пространство, $\mathfrak{S}$ есть σ-алгебра подмножеств из X, а T — некоторое множество на числовой прямой. Функция $P(t, x, \tau, A)$, определенная для всех $x \in X$, $t < \tau$; $t, \tau \in T$, $A \in \mathfrak{S}$, называется *переходной марковской функцией*, если она при фиксированных t, x, τ является вероятностной мерой по A, измерима относительно $\mathfrak{S}$ по x при фиксированных t, τ, A и кроме того удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена: если $t_1 < t_2 < t_3$; $t_1, t_2, t_3 \in T$, то

$$P(t_1, x, t_3, A) = \int P(t_1, x, t_2, dy)\, P(t_2, y, t_3, A). \tag{1.1}$$

1.2. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$, определенный для $t \in T$ и принимающий значения из X, называется *процессом Маркова*, если существует такая функция $P(t, x, \tau, A)$, что каковы бы ни были $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ из T,

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in A_1, \ldots, \xi(t_k) \in A_k\} = \int\limits_{x_1 \in A_1} \ldots \int\limits_{x_{k-1} \in A_{k-1}} \mathbf{P}\{\xi(t_1) \in dx_1\} \times$$

$$\times P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \ldots P(t_{k-1}, x_{k-1}, t_k, A_k). \tag{1.2}$$

Мы будем говорить, что $P(t, x, \tau, A)$ является *переходной марковской функцией* процесса $\xi(t)$.

Из (1.2) следует, что для процесса $\xi(t)$ с вероятностью 1 будет справедливо соотношение: для $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ из T

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in A_1, \ldots, \xi(t_k) \in A_k \mid \xi(t);\ t \leqslant t_0\} = \mathbf{P}\{\xi(t_1) \in A_1, \ldots, \xi(t_k) \in A_k \mid \xi(t_0)\}; \tag{1.3}$$

первая из вероятностей обозначает условную вероятность при условии, что $\xi(t)$ фиксированно для всех $t \leqslant t_0$, вторая — условную вероятность при фиксированном $\xi(t_0)$ (см. [15], стр. 81). Условная вероятность так связана с переходной марковской функцией:

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in A_1 \mid \xi(t_0)\} = P(t_0, \xi(t_0), t_1, A). \tag{1.4}$$

Мы будем рассматривать процессы $\xi(t)$ со значениями из полного метрического сепарабельного пространства X, $\mathfrak{S}$ будет σ-алгебра всех борелевских множеств из X, а T — отрезок $[0,1]$. Расстояние в X между двумя точками x и y будет обозначаться $\rho(x, y)$. Нас будут интересовать только такие марковские процессы, выборочные функции которых с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода. Достаточные условия для отсутствия у выборочных функций процесса разрывов второго рода были найдены Дынкиным [16] и Кини [17]. Обобщая условие равномерной стохастической непрерывности (см. ниже 1.3), использовавшееся в работах Дынкина и Кини, мы найдем более широкие условия — условия равномерной стохастической регулярности (см. 1.4), при которых выборочные функции процесса также с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода.

Обозначим $V_\varepsilon(x)$ множество точек y, для которых $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$.

1.3. Условие РН. Марковский процесс удовлетворяет условию РН (является равномерно стохастически непрерывным), если его переходная марковская функция $P(t, x, \tau, A)$ удовлетворяет соотношению: для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\tau - t \downarrow 0} \sup_{x \in X} P(t, x, \tau, V_\varepsilon(x)) = 0. \tag{1.5}$$

1.4. Условие РР. Марковский процесс удовлетворяет условию РР (является равномерно стохастически регулярным), если его переходная марковская функция $P(t, x, \tau, A)$ удовлетворяет условию: для каждого $\varepsilon > 0$, $t \in [0,1]$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{x \in X, t \leqslant t_1 < t_2 < t+h} P(t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x)) = 0, \tag{1.6}$$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{x \in X, t-h \leqslant t_1 < t_2 < t} P(t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x)) = 0, \tag{1.7}$$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{x \in X, 1-h \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1} P(t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x)) = 0. \tag{1.8}$$

Нам еще понадобится следующее

1.5. Определение. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ со значениями из X образует *цепь Маркова*, если существуют такие функции $P_i(x, A)$, $i = 1, \ldots, k-1$, определенные для $x \in X$ и всех борелевских A из X, являющиеся вероятностными мерами при фиксированном x, измеримыми по Борелю функциями x при фиксированном A, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_k \in A_k\} = \int\limits_{x_1 \in A_1} \ldots \int\limits_{x_{k-1} \in A_{k-1}} \mathbf{P}\{\xi_1 \in dx_1\} P_1(x_1, dx_2) \ldots$$

$$\ldots P_{k-1}(x_{k-1}, A_k). \tag{1.9}$$

Функции $P_i(x, A)$ называются переходными вероятностями цепи на i-том шаге.

Будем еще рассматривать функции $P_{i,j}(x_0, A)$, определяемые равенством:

$$P_{i,j}(x_0, A) = \int \ldots \int P_i(x_0, dx_1) \ldots P_{j-1}(x_{j-1-i}, A), \quad (i < j).$$

Докажем теперь несколько вспомогательных предложений.

1.6. Лемма. *Пусть* $\xi_1, \dots, \xi_m$ *образуют цепь Маркова, причем* $P_{k,m}(x, V_\varepsilon(x)) \leqslant \alpha < 1$ $(k < m)$ *для всех* $x \in X$. *Для каждого борелевского множества* A *обозначим* A_ε^+ — *множество тех* y, *расстояние которых от* A *не превосходит* ε. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in A_\varepsilon^+, \xi_2 \in A_\varepsilon^+, \dots, \xi_m \in A_\varepsilon^+\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{P}\{\xi_m \overline{\in} A\}}{1-\alpha}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Имеем

$$1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_\varepsilon^+, \dots, \xi_m \in A_\varepsilon^+\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \overline{\in} A_\varepsilon^+\} + \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_\varepsilon^+, \xi_2 \overline{\in} A_\varepsilon^+\} + \dots$$

$$\dots + \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_\varepsilon^+, \xi_2 \in A_\varepsilon^+, \dots, \xi_{m-1} \in A_\varepsilon^+, \xi_m \overline{\in} A_\varepsilon^+\}.$$

Далее

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in A_\varepsilon^+, \dots, \xi_{k-1} \in A_\varepsilon^+, \xi_k \overline{\in} A_\varepsilon^+\} =$$

$$= \int\limits_{x_1 \in A_\varepsilon^+} \dots \int\limits_{x_{k-1} \in A_\varepsilon^+} \int\limits_{x_k \overline{\in} A_\varepsilon^+} \mathbf{P}\{\xi_1 \in dx_1\}\, P_1(x_1, dx_2) \dots P_{k-1}(x_{k-1}, dx_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{x_1 \in A_\varepsilon^+} \dots \int\limits_{x_{k-1} \in A_\varepsilon^+} \int\limits_{x_k \overline{\in} A_\varepsilon^+} \mathbf{P}\{\xi_1 \in dx_1\}\, P_1(x_1, dx_2) \dots$$

$$\dots P_{k-1}(x_{k-1}, dx_k)\, P_{k,m}(x_k, X \setminus A) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_\varepsilon^+, \xi_2 \in A_\varepsilon^+, \dots, \xi_{k-1} \in A_\varepsilon^+, \xi_k \overline{\in} A_\varepsilon^+, \xi_m \overline{\in} A\}.$$

Значит $1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_\varepsilon^+, \dots, \xi_m \in A_\varepsilon^+\} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\{\xi_m \overline{\in} A\}$, откуда и следует доказательство леммы.

1.7. Лемма. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ *образуют цепь Маркова, и* $P_{j,m}(x, V_\varepsilon(x)) \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ *для всех* $j < m$ *и* $x \in X$. *Тогда*

$$\sum_{i=2}^{m} \mathbf{P}\{\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) > 4\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{1-2\alpha} \mathbf{P}\{\rho(\xi_m, \xi_1) > \varepsilon\}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\mathbf{P}\{\rho(\xi_m, \xi_{m-1}) \leqslant 4\varepsilon, \dots, \rho(\xi_{j+1}, \xi_j) \leqslant 4\varepsilon, \rho(\xi_j, \xi_{j-1}) > 4\varepsilon\} =$$

$$= \int\limits_X \mathbf{P}\{\rho(\xi_m, \xi_{m-1}) \leqslant 4\varepsilon, \dots, \rho(\xi_{j+1}, \xi_j) \leqslant 4\varepsilon \mid \xi_j = x\}\, \mathbf{P}\{\rho(\xi_j, \xi_{j-1}) > 4\varepsilon \mid \xi_j = x\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\xi_j \in dx\} \geqslant \int\limits_X \mathbf{P}\{\rho(\xi_m, x) \leqslant 2\varepsilon, \dots, \rho(\xi_{j+1}, x) \leqslant 2\varepsilon \mid \xi_j = x\}\, \mathbf{P}\{\xi_j \in dx\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\rho(\xi_j, \xi_{j-1}) > 4\varepsilon \mid \xi_j = x\}.$$

Но на основании 1.6

$$\mathbf{P}\{\rho(\xi_{j+1}, x) \leqslant 2\varepsilon, \ldots, \rho(\xi_m, x) \leqslant 2\varepsilon \mid \xi_j = x\} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{\mathbf{P}\{\rho(\xi_m, x) > \varepsilon \mid \xi_j = x\}}{1-\alpha} \geqslant \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}.$$

Следовательно

$$\mathbf{P}\{\rho(\xi_m, \xi_{m-1}) \leqslant 4\varepsilon, \ldots, \rho(\xi_{j+1}, \xi_j) \leqslant 4\varepsilon, \rho(\xi_j, \xi_{j-1}) > 4\varepsilon\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\mathbf{P}\{\rho(\xi_{j-1}, \xi_j) > 4\varepsilon\},$$

или

$$\sum_{j=2}^{m} \mathbf{P}\{\rho(\xi_{j-1}, \xi_j) > 4\varepsilon\} \leqslant \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\sum_{j=2}^{m}\mathbf{P}\{\rho(\xi_m, \xi_{m-1}) \leqslant 4\varepsilon, \ldots, \rho(\xi_j, \xi_{j+1}) \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon, \rho(\xi_j, \xi_{j-1}) > 4\varepsilon\} = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}(1 - \mathbf{P}\{\sup_{2<j\leqslant m}\rho(\xi_{j-1}, \xi_j) \leqslant 4\varepsilon\}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}(1 - \mathbf{P}\{\sup_{2<j\leqslant m}\rho(\xi_1, \xi_j) \leqslant 2\varepsilon\}) \leqslant \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\cdot\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{P}\{\rho(\xi_1, \xi_m) > \varepsilon\} =$$
$$= \frac{1}{1-2\alpha}\mathbf{P}\{\rho(\xi_1, \xi_m) > \varepsilon\}$$

(мы использовали 1.6). Лемма доказана.

1.8. Лемма. *Пусть для процесса* $\xi(t)$ *выполняется условие* PP. *Положим*

$$\Delta^{P}_{\mathbf{J}_1}(c, \xi(t), \varepsilon) = \sup_{t_4 - c \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4} \min[\sup_{x\in X} P(t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x));$$
$$\sup_{x\in X} P(t_3, x, t_4, V_\varepsilon(x))]. \tag{1.11}$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to 0}\Delta^{P}_{\mathbf{J}_1}(c, \xi(t), \varepsilon) = 0. \tag{1.12}$$

Доказательство. Если бы (1.12) не выполнялось, то нашлись бы четыре последовательности точек $t_n^{(1)} < t_n^{(2)} \leqslant t_n^{(2)} < t_n^{(4)}$, сходящиеся к одному и тому же пределу t_0, такие что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in X} P(t_n^{(1)}, x, t_n^{(2)}, V_\varepsilon(x)) > 0 \text{ и } \overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in X} P(t_n^{(1)}, x, t_n^{(2)}, V_\varepsilon(x)) > 0,$$

а так как точка t_0 не может одновременно лежать и между $t_n^{(1)}$ и $t_n^{(2)}$, и между $t_n^{(3)}$ и $t_n^{(4)}$, то это противоречило бы или (1.6) или (1.7), если там вместо t взять t_0.

1.9. Лемма. *Пусть процесс* $\xi(t)$ *удовлетворяет условию* PP. *Выберем такое* $\bar{c}$, *чтобы* $\Delta^{P}_{\mathbf{J}_1}\left(\bar{c}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{5}\right) < \frac{1}{3}$. *Тогда, каковы ни были бы точки* $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N$,

$$\sum_{j=1}^{N}\mathbf{P}\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\} \leqslant 5 + \frac{4}{\bar{c}}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть точки $0 = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \ldots < \bar{t}_k < 1$ выбраны так, что

$$\sup_{x \in X} P(t_j, x, \bar{t}_{i+1}, V_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)) < \frac{1}{3} \text{ для } \bar{t}_i < t_j < \bar{t}_{i+1},$$

а

$$\sup_{x \in X} P(\bar{t}_i, x, \bar{t}_{i+1}, V_{\frac{\varepsilon}{5}}(x)) \geqslant \frac{1}{3}; \quad \sup_{x \in X} P(t, x, 1, V_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)) < \frac{1}{3} \text{ для } \bar{t}_k < t < 1.$$

Из определения $\bar{c}$ следует, что на отрезке длины $\bar{c}$ могут быть расположены лишь две точки из точек $\bar{t}_k$. Поэтому $k \leqslant 2(1 + 1/\bar{c})$.

Имеем далее:

$$\sum_{j=2}^{N} \mathbf{P}\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\} \leqslant k + \sum_{t_j < \bar{t}_1} \mathbf{P}\{\rho(\xi(t_j), \xi(t_{j-1})) > \varepsilon\} +$$

$$+ \sum_{\bar{t}_1 < t_{j-1} < t_j < \bar{t}_2} \mathbf{P}\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\} + \ldots + \sum_{\bar{t}_k < t_{j-1} < t_j < 1} \mathbf{P}\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\}.$$

Но каждая сумма в правой части последнего равенства на основании 1.7 не превосходит 1, так как в нашем случае $\alpha = \frac{1}{3}$. Всего таких сумм $k + 1$. Следовательно

$$\sum_{j=2}^{N} \mathbf{P}\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\} \leqslant 2k + 1 \leqslant 5 + \frac{4}{\bar{c}}.$$

Лемма доказана.

1.10. Лемма. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ *образуют цепь Маркова и*

$$\alpha = \sup_{\substack{x \in X \\ k=1,2,\ldots,m-1}} P_k(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x)); \quad \beta = \sup_{1 \leqslant i < j < k < l \leqslant m} \min[\sup_{x \in X} P_{i,j}(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x)); \sup_{x \in X} P_{k,l}(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))],$$

то при $\beta < \frac{1}{4}$

$$\mathbf{P}\{\sup_{1 \leqslant i < j \leqslant k < l \leqslant m} \min[\rho(\xi_i, \xi_j); \rho(\xi_k, \xi_l)] > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} 12\beta, & \text{при любом } \alpha, \\ 16(\alpha + 2\beta)\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_1, \xi_m) > \frac{\varepsilon}{4}\right\} & \text{при } \alpha \leqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Доказательство. Событие $\mathfrak{A}$, заключающееся в том, что $\sup_{1 \leqslant i < j \leqslant k < l \leqslant m} \min[\rho(\xi_i, \xi_j); \rho(\xi_k, \xi_l)] > \varepsilon$, влечет хотя бы одно из событий $\mathfrak{B}_k$, заключающихся в том, что $\rho(\xi_1, \xi_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ для $1 \leqslant i < k$, $\rho(\xi_1, \xi_k) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sup_{k < l} \rho(\xi_k, \xi_l) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Заметим, что $\sup_{x \in X} P_{k,l}(x, V_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)) \leqslant \alpha + 2\beta$, каковы бы ни были α и β.

Действительно, пусть j — наименьший номер, такой что $k<j<l$, $\sup\limits_{x\in X} P_{k,j}(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))\geqslant\beta$, тогда $\sup\limits_{x\in X} P_{k,j-1}(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))\leqslant\beta$; $\sup\limits_{x\in X} P_{j,l}(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))\leqslant\beta$ и кроме того $\sup\limits_{x\in X} P_{j-1}(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))\leqslant\alpha$. Отсюда и следует наше утверждение.

Значит, если $\alpha+2\beta<1$, то

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k^{\infty}\}=\int\limits_{x\in X}\mathbf{P}\{\xi_1\in dx_1\}\int\limits_{\rho(x_k,x_1)\geqslant\varepsilon}\mathbf{P}\left\{\rho(x_1,\xi_2)<\frac{\varepsilon}{2},\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\rho(x_1,\xi_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2},\ \rho(x_1,\xi_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\,\middle|\,\xi_1=x_1,\ \xi_k=x_k\right\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\left\{\sup_{k<l}\rho(\xi_k,\xi_l)>\frac{\varepsilon}{2}\,\middle|\,\xi_k=x_k\right\}\mathbf{P}\{\xi_k\in dx_k\,|\,\xi_1=x_1\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{x_k\in X}\mathbf{P}\left\{\sup_{k<l}\rho(\xi_k,\xi_l)>\frac{\varepsilon}{2}\,\middle|\,\xi_k=x_k\right\}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_1,\xi_2)<\frac{\varepsilon}{2},\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\rho(\xi_1,\xi_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2},\rho(\xi_1,\xi_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_1,\xi_2)<\frac{\varepsilon}{2},\ldots,\rho(\xi_1,\xi_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2},\rho(\xi_1,\xi_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}\}\leqslant\Sigma\,\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_k\}\leqslant\frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{m}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_1,\xi_2)<\frac{\varepsilon}{2},\ldots,\rho(\xi_1,\xi_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2},\ \rho(\xi_1,\xi_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}=$$

$$=\frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta}\mathbf{P}\left\{\sup_{2\leqslant k\leqslant m}\rho(\xi_1,\xi_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant\frac{\alpha+2\beta}{(1-\alpha-2\beta)^2}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_1,\xi_m)\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

Если $\alpha\leqslant\frac{1}{4}$, то $\alpha+2\beta\leqslant\frac{3}{4}$ и значит

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}\}\leqslant 16(\alpha+2\beta)\mathbf{P}\left\{\rho(\xi_1,\xi_m)>\frac{\varepsilon}{4}\right\}. \tag{1.14}$$

Пусть далее $\alpha>\beta$. Тогда событие $\mathfrak{A}$ влечет одно из двух событий:

$$\mathfrak{A}_1=\left\{\sup_{1<j\leqslant p}\rho(\xi_1,\xi_j)>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\text{ и }\mathfrak{A}_2=\left\{\sup_{p<j\leqslant m}\rho(\xi_{p+1},\xi_j)>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Выберем p так, чтобы $\sup\limits_x P_p(x, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))=\alpha$. Тогда

$$\sup_{x\in X}P_{j,p}(x,V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))\leqslant\beta\text{ для }j<p\text{ и }\sup_{x\in X}P_{j,m}(x,V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x))\leqslant\beta$$

для $j\geqslant p+1$. Поэтому на основании 1.6

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}_1\}\leqslant\frac{\beta}{1-\beta}\leqslant\frac{4}{3}\beta,\ \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_2\}\leqslant\frac{4}{3}\beta\text{ и значит }\mathbf{P}\{\mathfrak{A}\}\leqslant\frac{8}{3}\beta.$$

Кроме того, из (1.14) следует, что $\mathbf{P}\{\mathfrak{A}\}\leqslant 12\,\beta$ при $\alpha<\beta$, так что последнее неравенство всегда имеет место. Лемма доказана.

1.11. Лемма. *Пусть для процесса* $\xi(t)$ *выполнено условие* РР. *Выберем такое* $\bar{c}$, *чтобы* $\Delta^P_{J_1}\left(\bar{c}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{20}\right) \leqslant \frac{1}{3}$, *и такое* $c(\delta)$, *чтобы* $\Delta^P_{J_1}\left(c(\delta), \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) = \delta \leqslant \frac{1}{4}$. *Если* l *такое целое число, что* $\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) \leqslant \frac{1}{4}$, *то, каковы бы ни были* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t_{i_1}<t_{i_2}<t_{i_3}<t_{i_4}+\frac{1}{l}} \min\left[\rho(\xi(t_{i_1}), \xi(t_{i_2})); \rho(\xi(t_{i_3}), \xi(t_{i_4}))\right] > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 24\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + 240\left(1+\frac{1}{c}\right)\left[\delta + 2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right]. \quad (1.15)$$

Доказательство. Событие $\mathfrak{A}$, заключающееся в том, что

$$\sup_{t_{i_1}<t_{i_2}\leqslant t_{i_3}<t_{i_4}} \min\left[\rho(\xi(t_{i_1}), \xi(t_{i_2})); \rho(\xi(t_{i_3}), \xi(t_{i_4}))\right] > \varepsilon,$$

влечет хотя бы одно из событий $\mathfrak{A}_k$, заключающихся в том, что в интервале $\left(\frac{k}{l}, \frac{k+3}{l}\right)$ найдутся четыре точки $t_{i_1} < t_{i_2} \leqslant t_{i_3} < t_{i_4}$, для которых $\rho(\xi(t_{i_1}), \xi(t_{i_2})) > \varepsilon$, $\rho(\xi(t_{i_3}), \xi(t_{i_4})) > \varepsilon$. Положим

$$\alpha_k = \sup_{x\in X,\ \frac{k}{l}<t_i<t_j\leqslant\frac{k+3}{l}} P\left(t_i, x, t_j, V_{\frac{\varepsilon}{12}}(x)\right).$$

Пусть r_k — наименьший номер j, для которого $t_j > \frac{k}{l}$, а r'_k — наибольший номер j, для которого $t_j \leqslant \frac{k+3}{l}$. На основании 1.10 получаем

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}_k\} \leqslant \begin{cases} 12\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right), \\ 16\left[2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \alpha_k\right]\mathbf{P}\left\{\rho(\xi(t_{r_k}), \xi(t_{r'_k})) > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \text{ при } \alpha_k < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Обозначим $N(\delta)$ число интервалов $\left(\frac{k}{l}, \frac{k+3}{l}\right)$, для которых $\alpha_k > \delta$. Очевидно, что число таких интервалов не может превосходить $2\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{A}\} \leqslant \Sigma\,\mathbf{P}\{\mathfrak{A}_k\} \leqslant 24(1/c(\delta)+1)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) +$$

$$+ 16\left(2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \alpha_k\right)\sum_k \mathbf{P}\left\{\rho(\xi(t_{r_k}), \xi(t_{r'_k})) > \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

Но на основании 1.7

$$\sum_k \mathbf{P}\left\{\rho(\xi(t_{r_k}), \xi(t_{r'_k})) > \frac{\varepsilon}{4}\right\} = \sum_{j=0}^{2}\sum_{k=3q+j}\mathbf{P}\left\{\rho(\xi(t_{r_k}), \xi(t_{r'_k})) > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 3\left(5+\frac{4}{c}\right) \leqslant 15\left(1+\frac{1}{c}\right).$$

Лемма доказана.

§ 2. Свойства непрерывности выборочных функций процесса

В случае равномерно стохастически непрерывных марковских процессов Дынкиным и Кини (см. [16], [17]) было установлено, что выборочные функции процесса с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода. Как будет показано в этом параграфе, этот результат сохраняется и для процессов, удовлетворяющих условию PP. Для более точной формулировки нам понадобятся два определения.

2.1. Определение. Мы будем говорить, что функция $x(t)$, определенная на отрезке $[0,1]$ и принимающая значения из X, принадлежит пространству K_X, если она непрерывна справа при $0 \leqslant t < 1$ и имеет предел слева для $0 < t \leqslant 1$, причем $x(1-0) = x(1)$. Пространство K_X было введено в [1].

2.2. Определение. Процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ называются *стохастически эквивалентными*, если $\mathbf{P}\{\xi_1(t) = \xi_2(t)\} = 1$ для любого t.

Понятно, что, зная лишь конечномерные распределения процесса (в марковском случае — зная начальное распределение и переходную марковскую функцию), мы не можем отличить процесс от другого процесса, стохастически ему эквивалентного. Поэтому обычно под словами «для процесса $\xi(t)$ с вероятностью 1 выполняется свойство C» понимают следующее: «среди процессов, стохастически эквивалентных $\xi(t)$, существует процесс $\xi'(t)$ такой, что почти для всех выборочных функций процесса выполняется свойство C». Такой подход к изучению свойств процесса, выполняющихся с вероятностью 1, предложен Е. Слуцким (см. [18]). (Существует еще подход Дуба, основанный на понятии сепарабельного процесса, использованного, например, в [15], но для наших целей первый подход удобнее).

2.3. Теорема. *Если для марковского процесса выполнено свойство* PP, *то существует такой процесс* $\xi'(t)$, *стохастически эквивалентный процессу* $\xi(t)$, *что выборочные функции процесса* $\xi'(t)$ *с вероятностью* 1 *принадлежат* K_X.

Доказательство. Обозначим $\xi_n(t)$ марковский процесс, для которого

$$\xi_n(t) = \xi\left(\frac{[nt]}{n}\right), \quad t < 1; \quad \xi_n(1) = \xi\left(\frac{n-1}{n}\right). \tag{2.1}$$

Очевидно, что $\mathbf{P}\{\xi_n(t) \in K_X\} = 1$. На основании 1.11

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{1}{l}, \xi_n(t)\right) > \varepsilon\right\} \leqslant 24\left[\left(\frac{1}{c(\delta)} + 1\right)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \right.$$
$$\left. + 10\left(\frac{1}{c} + 1\right)\left(\delta + 2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right)\right]. \tag{2.2}$$

Заметим далее, что если m делится на n, то

$$\Delta_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_m(t)\right) \geqslant \Delta_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_n(t)\right). \tag{2.3}$$

Поэтому, если рассмотреть последовательность $n_k = 2^k$, то события $\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_{n_k}(t)\right) > \varepsilon\right\}$ при $k \to \infty$ образуют монотонно возрастающую последовательность событий (предыдущее влечет последующее). Положим

$\Delta\left(\frac{3}{l}\right) = \lim_{n_k \to \infty} \Delta_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_{n_k}(t)\right)$. Этот предел существует с вероятностью 1. При этом

$$\mathbf{P}\left\{\Delta\left(\frac{3}{l}\right) > \varepsilon\right\} \leqslant 24\left[\left(\frac{1}{c(\delta)} + 1\right)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \right.$$

$$\left. + 10\left(\frac{1}{c} + 1\right)\left(\delta + 2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right)\right]. \qquad (2.4)$$

Так как $\Delta_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_n(t)\right)$ монотонно убывают при $l \to \infty$, то и $\Delta\left(\frac{3}{l}\right)$ монотонно убывает при $l \to \infty$. Поэтому существует с вероятностью 1 предел $\Delta = \lim_{l \to \infty}\left(\frac{3}{l}\right)$, где Δ некоторая случайная величина. Так как $\Delta \leqslant \Delta\left(\frac{3}{l}\right)$, то

$$\mathbf{P}\{\Delta > \varepsilon\} \leqslant 24\left[\left(\frac{1}{c(\delta)} + 1\right)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \right.$$

$$\left. + 10\left(\frac{1}{c} + 1\right)\left(\delta + 2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right)\right]. \qquad (2.5)$$

Поскольку левая часть не зависит от l, переходя к пределу при $l \to \infty$, получим на основании 1.8

$$\mathbf{P}\{\Delta > \varepsilon\} \leqslant 240\,(1/c + 1)\,\delta \text{ для каждого } \varepsilon > 0.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим $\mathbf{P}\{\Delta > \varepsilon\} = 0$ для всякого $\varepsilon > 0$, т. е. $\mathbf{P}\{\Delta = 0\} = 1$. Значит

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{l \to \infty} \overline{\lim_{n_k \to \infty}} \Delta_{J_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_{n_k}(t)\right) = 0\right\} = 1.$$

Рассмотрим $\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \rho(\xi_{n_k}(0), \xi_{n_k}(t)) > \varepsilon\}$; если h настолько мало, что

$\sup_{x \in X,\ 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant h} P(t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x)) < \frac{1}{2}$, то на основании 1.6

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \rho(\xi_{n_k}(0), \xi_{n_k}(t)) > \varepsilon\} \leqslant 2 \sup_{x \in X,\ 0 < t_1 < t_2 \leqslant h} P(t_1, x, t_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)). \qquad (2.6)$$

Величина $\sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \rho(\xi_{n_k}(0), \xi_{n_k}(t))$ монотонно возрастает при $k \to \infty$. Поэтому с вероятностью 1 существует предел $\chi(h) = \lim_{k \to \infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \rho(\xi_{n_k}(0), \xi_{n_k}(t))$, где $\chi(h)$ некоторая случайная величина, причем

$$\mathbf{P}\{\chi(h) > \varepsilon\} \leqslant 2 \sup_{x \in X,\ 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant h} P(t_1, x, t_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)). \qquad (2.7)$$

Величины $\sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \rho(\xi_{n_k}(0), \xi_{n_k}(t))$ монотонно убывают при $h \to 0$. Следовательно и $\chi(h)$ монотонно убывает при $h \to 0$. Значит с вероятностью 1 существует предел $\chi = \lim_{h \to 0} \chi(h)$, причем каково бы ни было $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\chi > \varepsilon\} \leqslant 2 \sup_{x \in X,\ 0 < t_1 < t_2 \leqslant h} P(t_1, x, t_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)). \qquad (2.8)$$

Значит $\mathbf{P}\{\chi = 0\} = 1$ (получается переходом к пределу в (2.8) при $h \to 0$)

или

$$\mathbf{P}\{\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{0<t<h}\rho(\xi_{n_k}(t),\xi_{n_k}(0))=0\}=1. \tag{2.9}$$

Аналогично получаем

$$\mathbf{P}\{\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{1-h\leqslant t\leqslant 1}\rho(\xi_{n_k}(1),\xi_{n_k}(t))=0\}=1. \tag{2.10}$$

Значит

$$\mathbf{P}\{\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{k\to\infty}}[\Delta_{\mathbf{J}_1}(h,\xi_{n_k}(t))+\sup_{0\leqslant t\leqslant h}\rho(\xi_{n_k}(t),\xi_{n_k}(0))+$$

$$+\sup_{1-h<t\leqslant 1}\rho(\xi_{n_k}(1),\xi_{n_k}(t))]=0\}=1. \tag{2.11}$$

На основании 2.7.2 работы [1] мы можем заключить, что последовательность выборочных функций $\xi_{n_k}(t)$ с вероятностью 1 компактна в топологии $\mathbf{J}_1$ (см. определение в 2.2 статьи [1]). Поэтому можно выбрать такую последовательность номеров $n_{k'}$ (вообще говоря, случайную, но $n_{k'}\to\infty$ с вероятностью 1), что с вероятностью 1 будет выполняться $\xi_{n_{k'}}(t)\xrightarrow{\mathbf{J}_1}\xi'(t)$, где $\xi'(t)$ — некоторый процесс, траектории которого с вероятностью 1 принадлежат K_X. Покажем, что процесс $\xi'(t)$ стохастически эквивалентен процессу $\xi(t)$. Учитывая то обстоятельство, что оба процесса стохастически непрерывны справа, т. е. $\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{P}\{|\xi(t+h)-\xi(t)|>\varepsilon\}=0$ и $\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{P}\{|\xi'(t+h)-\xi'(t)|>\varepsilon\}=0$, и стохастически непрерывны при $t=1$, нам достаточно доказать, что $\mathbf{P}\{\xi(t)=\xi'(t)\}=1$ для некоторого всюду плотного множества значений t. Заметим, что из соотношения $\xi_{n_{k'}}(t)\xrightarrow{\mathbf{J}_1}\xi'(t)$ вытекает, что во всякой точке стохастической непрерывности процесса $\xi'(t)$ (а таковыми будут все точки процесса $\xi'(t)$, за исключением, быть может, счетного их числа) $\xi_{n_{k'}}(t)\to$ $\to\xi'(t)$ с вероятностью 1 (это легко выводится из определения топологии $\mathbf{J}_1$). С другой стороны, точно таким же способом, каким было получено (2.9), можно показать, что для всякого $0\leqslant t\leqslant 1$, являющегося точкой стохастической непрерывности $\xi(t)$, будет выполняться

$$\mathbf{P}\{\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{t-h<t_1<t+h}\rho(\xi_{n_k}(t_1),\xi(t))=0\}=1, \tag{2.12}$$

следовательно, при всяком t, являющемся точкой стохастической непрерывности $\xi(t)$ с вероятностью 1, имеем $\lim_{k\to\infty}\xi_{n_k}(t)=\xi(t)$, а значит и $\lim_{k\to\infty}\xi_{n_{k'}}(t)=$ $=\xi(t)$. Поэтому $\mathbf{P}\{\xi(t)=\xi'(t)\}=1$ для всякого t, являющегося точкой стохастической непрерывности $\xi(t)$ и $\xi'(t)$. Из этого и сказанного выше и вытекает стохастическая эквивалентность $\xi(t)$ и $\xi'(t)$. Теорема доказана.

Во всех дальнейших наших рассуждениях мы будем рассматривать только марковские процессы, выборочные функции которых с вероятностью 1 принадлежат K_X.

2.4. Замечание. Как было установлено при доказательстве теоремы 2.3 с вероятностью 1 существует $\lim_{n_k\to\infty}\Delta_{\mathbf{J}_1}(c,\xi_{n_k}(t))$. Если $\xi(t)$ сразу предположить имеющим выборочные функции, принадлежащие K_X, то имеет

смысл величина $\Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi(t))$. Легко убедиться, что

$$\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{c}{2}, \xi(t)\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \Delta_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_{n_k}(t)). \tag{2.13}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{1}{2l}, \xi(t)\right) > \varepsilon\right\} \leqslant 24\left(\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \right.$$
$$\left. + 10\left(\frac{1}{c}+1\right)\left(\delta + 2\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right)\right). \tag{2.14}$$

Это неравенство нам понадобится впоследствии.

Из того, что $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \rho(x(t), x_0) = \sup\limits_{0<t_n<1} \rho(x(t_n), x_0), x(t) \in K_X$, где $\{t_n\}$ образуют некоторое всюду плотное на $[0,1]$ множество, и 1.6 вытекает

2.5. Лемма. *Если переходная марковская функция процесса $P(t, x, \tau, A)$, выборочные функции которого с вероятностью 1 принадлежат K_X, удовлетворяет неравенству*

$$P\left(t, x, b, V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\right) \leqslant \alpha < 1$$

для всех $a \leqslant t < b$, то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{a<t\leqslant b} \rho(\xi(t), \xi(a)) > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\,\mathbf{P}\left\{\rho(\xi(b), \xi(a)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{2.15}$$

§ 3. Общие предельные теоремы

В настоящем параграфе приводятся достаточные условия для того, чтобы распределение $f(\xi_n(t))$ сходилось к распределению $f(\xi_0(t))$ для любого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала, если уже известно, что конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$. При этом будет использоваться теорема 3.2.1 работы [1]. Более эффективные условия для сходимости $\mathbf{J}_1$-непрерывных функционалов содержатся в §§ 7 и 8.

3.1. Теорема. *Пусть для процессов $\xi_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, выполнено условие* PP, *и конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$ для всюду плотного множества значений t, включающего 0 и 1. Пусть, кроме того, для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Delta^P_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_n(t), \varepsilon) = 0. \tag{3.1}$$

Тогда для всякого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t))$ слабо сходится к распределению $f(\xi_0(t))$.

Доказательство. Из (3.1) следует, что можно выбрать такое $\bar{c}$, что $\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\bar{c}, \xi_n(t), \frac{\varepsilon}{20}\right) < \frac{1}{4}$ для всех n. Тогда на основании (2.14)

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{1}{2l}, \xi_n(t)\right) > \varepsilon\right\} \leqslant 24\left[\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_n(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \right.$$
$$\left. + 10\left(\frac{1}{\bar{c}}+1\right)\left(\delta + \Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_n(t), \frac{\varepsilon}{12}\right)\right)\right], \tag{3.2}$$

где $c(\delta)$ выбрано настолько малым, что $\Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(c(\delta), \xi_n(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) \leqslant \delta$ для всех n.

Это можно достичь ввиду (3.1). Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{1}{2l}, \xi_n(t)\right) > \varepsilon\right\} \leqslant 24\left[\frac{1}{c(\delta)} + 1 + \frac{10}{c} + 10\right] \overline{\lim_{n\to\infty}} \Delta^P_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{3}{l}, \xi_n(t), \frac{\varepsilon}{12}\right) + \\ + 240\left(\frac{1}{c} + 1\right)\delta, \tag{3.3}$$

или, учитывая (3.1),

$$\lim_{l\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{1}{2l}, \xi_n(t)\right) > \varepsilon\right\} \leqslant 240\left(\frac{1}{c} + 1\right)\delta,$$

ввиду произвольности $\delta > 0$

$$\lim_{l\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\left\{\Delta_{\mathbf{J}_1}\left(\frac{1}{2l}, \xi_n(t)\right) > \varepsilon\right\} = 0. \tag{3.4}$$

Таким образом для последовательности процессов $\xi_n(t)$ выполняются условия теоремы 3.2.1 из [1]. Применяя эту теорему, и получим доказательство нашей теоремы.

Условия теоремы 3.1 упрощаются, если предположить, что процесс $\xi_0(t)$ удовлетворяет условию РН. Более широкое применение в дальнейшем будет иметь следующая теорема, легко выводящаяся из 3.1.

3.2. Теорема. *Если для последовательности процессов $\xi_n(t)$ выполнено условие* РР, *а для процесса $\xi_0(t)$ выполнено условие* РН, *конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$ для всюду плотного множества значений t, включающего 0 и 1, и кроме того для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\tau - t \leqslant c} \sup_{x\in X} P_n(t, x, \tau, V_\varepsilon(x)) = 0, \tag{3.5}$$

где $P_n(t, x, \tau, A)$ — переходная марковская функция процесса $\xi_n(t)$, то для всякого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала f распределение $f(\xi_n(t))$ слабо сходится к распределению $f(\xi_0(t))$.

Для доказательства этой теоремы заметим, что

$$\sup_{\tau - t \leqslant c} \sup_{x\in X} P_n(t, x, \tau, V_\varepsilon(x)) \geqslant \Delta^P_{\mathbf{J}_1}(c, \xi_n, (t), \varepsilon), \tag{3.6}$$

а значит выполнение (3.5) влечет выполнение (3.1). Остается применить теорему 3.1.

§ 4. Некоторые сведения из теории полугрупп операторов. Предельная теорема для полугрупп

В работах ряда авторов (Феллер, Neveu, Дынкин, см. [12], [13], [14]) для изучения однородных марковских процессов был применен метод полугрупп линейных операторов (см. [11]). Мы также используем полугрупповые понятия для формулировки предельных теорем для марковских процессов.

4.1. Определение. Пусть B — некоторое пространство Банаха. Мы будем говорить, что семейство ограниченных линейных операторов U_t, $t > 0$ образует *полугруппу*, если

$$U_{t+\tau} = U_t U_\tau.$$

Нас будет интересовать тот случай, когда B это пространство всех непрерывных ограниченных функций, определенных в m-мерном пространстве.

4.2. Определение. Последовательность функций $f_n(x)$ (x) точка m-мерного пространства — *сильно сходится* к функции $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0;$$

последовательность $f_n(x)$ *слабо сходится* к функции $f(x)$, если для каждого x, $f_n(x) \to f(x)$ и существует такая постоянная C, что $|f_n(x)| \leqslant C$.

4.3. Определение. Полугруппа U_t называется *сильно непрерывной*, если для каждого $f \in C^{(m)}$ ($C^{(m)}$ в дальнейшем будем обозначать пространство всех непрерывных ограниченных функций, определенных на m-мерном эвклидовом пространстве) $U_t f$ сильно сходится к f при $t \to 0$; полугруппа U_t называется *слабо непрерывной*, если $U_t f$ слабо сходится к f при $t \to 0$ для всякого $f \in C^{(m)}$.

4.4. Определение. Пусть для функции f выражение $\dfrac{U_t f(x) - f(x)}{t}$ имеет сильный предел, равный $g(x)$, тогда мы будем говорить, что f принадлежит области определения D_I сильного инфинитезимального оператора I полугруппы U_t и писать $If = g$. Если для функции $f(x)$ существует предел выражения $\dfrac{U_t f(x) - f(x)}{t}$ при $t \to 0$, равный $g(x)$, то мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит области определения $D_{\tilde{I}}$ слабо инфинитезимального оператора $\tilde{I}$ полугруппы U_t и будем писать $\tilde{I}f = g$.

Основные сведения о сильных и слабых инфинитезимальных операторах можно почерпнуть из статьи Е. Б. Дынкина [13].

Пусть U_t сильно непрерывная полугруппа. Рассмотрим для $\lambda > 0$ выражение

$$R(\lambda, I) f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t f(x)\, dt \tag{4.1}$$

(интеграл понимается в смысле сильной (слабой) сходимости интегральных сумм). Если $\|U_t\| \leqslant 1$, то при $\gamma > 0$ справедлива следующая формула обращения (см. [11], стр. 280):

$$\int_0^t U_\tau f(x)\, d\tau = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{\lambda t} R(\lambda, I) f(x) \frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{4.2}$$

причем $R(\lambda, I)$ есть ни что иное, как резольвента инфинитезимального оператора I (доказательство этого утверждения можно найти например в статье Дынкина [13]). Если $\varphi \in D_I$, то для нее (4.2) может быть переписано в виде (см. [11], стр. 282)

$$\int_0^t U_\tau \varphi(x)\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} [\varphi(x) - R(\lambda, I) I\varphi(x)] \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{4.3}$$

Заметим также (см. [13], § 2, п. 7), что $\|R(\lambda, I)\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ ($\operatorname{Re}\lambda$ обозначает вещественную часть λ).

Укажем теперь на связь, которая существует между полугруппами и однородными марковскими процессами. У однородного марковского процесса переходная марковская функция $P(t, x, \tau, A)$ зависит от разности $\tau - t$, и мы будем ее записывать в виде $P(\tau - t, x, A)$. Наложим на $P(t, x, A)$ следующие ограничения:

4.5. Условие ПВ. Мы будем говорить, что для переходной марковской функции $P(t, x, A)$ (или для процесса $\xi(t)$, имеющего эту переходную марковскую функцию) выполнено условие ПВ, если

1) $P(t, x, A)$ измерима по совокупности переменных t и x для любого борелевского множества A;

2) $P(t, x, A)$ при фиксировании t как мера слабо непрерывна по x, т. е. для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ выражение $\int P(t, x, dy) f(y)$ является также непрерывным по x;

3) $\lim\limits_{t \to 0} P(t, x, V_\varepsilon(x)) = 0$ для любого x, $\varepsilon > 0$.

Определим для процесса $\xi(t)$, удовлетворяющего условию ПВ, полугруппу U_t формулой:

$$U_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy).$$

Полугрупповое свойство вытекает из уравнения Колмогорова — Чепмена. Для этой полугруппы $\|U_t\| \leqslant 1$, и кроме того, ввиду свойства 3, эта полугруппа будет слабо непрерывна. Как следует из теорем 4 и 2′ статьи Е. Б. Дынкина [13], переходные марковские функции в этом случае полностью определяются слабым инфинитезимальным оператором полугруппы.

Рассмотрим еще дискретную полугруппу: пусть U_1 некоторый ограниченный линейный оператор, положим $U_k f(x) = U_1^k f(x)$ (U_1^k есть k-ая степень оператора U_1). Положим:

$$I_n = n(U_1 - E),$$

$$R_n(\lambda, I_n) = \frac{1}{n} \sum_0^\infty e^{-\frac{k\lambda}{n}} U_1^k = \frac{\lambda}{n} [n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1) E - I_n]^{-1}, \tag{4.4}$$

E здесь обозначает единичный оператор (оператор тождественного преобразования), U_1^0 считаем равным E. Справедлива формула обращения:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k U_j f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\pi n}^{\gamma + i\pi n} R_n(\lambda, I_n) f(x) \frac{e^{\frac{\lambda(k+1)}{n}} - 1}{n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1)} d\lambda, \tag{4.5}$$

или

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k U_j f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\pi n}^{\gamma + i\pi n} \frac{e^{\frac{\lambda(k+1)}{n}} - 1}{n^2 (e^{\frac{\lambda}{n}} - 1)^2} [e^{\frac{\lambda}{n}} f(x) - R_n(\lambda, I_n) I_n f(x)] d\lambda, \tag{4.6}$$

так как

$$\int_{\gamma-i\pi n}^{\gamma+i\pi n} R_n(\lambda, I_n) f(x) \frac{1}{n(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)} d\lambda = \int_{\gamma-i\pi n}^{\gamma+i\pi n} R_n(\lambda, I_n) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda k}{n}} d\lambda = 0,$$

и

$$R_n(\lambda, I_n) = \frac{e^{\frac{\lambda}{n}} E - R_n(\lambda, I_n) I_n}{n(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)}. \tag{4.7}$$

Дискретную полугруппу можно получить из однородной цепи Маркова. Пусть $P(x, A)$ будет переходная вероятность за 1 шаг в однородной цепи Маркова, причем относительно этой переходной вероятности мы будем предполагать, что для каждой непрерывной ограниченной функции $f(x)$, $\int P(x, dy) f(y)$ будет также непрерывной функцией. Положим тогда

$$U_1 f(x) = \int P(x, dy) f(y), \text{ а } U_k f(x) = U^k f(x).$$

Приступим теперь к доказательству предельных теорем для полугрупп, на основании которых в дальнейшем будут установлены достаточные условия для сходимости конечномерных распределений процессов.

4.6. Теорема. *Пусть $U_t^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ — последовательность сильно непрерывных полугрупп, таких что $\| U_t^{(n)} \| \leqslant 1$. Обозначим $I^{(n)}$ сильный инфинитезимальный оператор полугруппы $U_t^{(n)}$. Если $I_\varphi^{(n)}$ для всякого $\varphi \in D_{I^{(0)}}$ сильно сходится к $I^{(0)}\varphi$, то $U_t^{(n)} f$ для каждого $f \in B$ сильно сходится к $U_t^{(0)} f$.*

4.7. Теорема. *Пусть $U_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность дискретных полугрупп, причем $\| U_k^{(n)} \| \leqslant 1$, а $U_t^{(0)}$ сильно непрерывная полугруппа, $\| U_t^{(0)} \| \leqslant 1$. Положим $I_n^{(n)} \varphi(x) = n(U_1^{(n)} - E)\varphi(x)$. Если $I_n^{(n)}\varphi$ для всякого $\varphi \in D_{I^{(0)}}$ сильно сходится к $I^{(0)}\varphi$, то $U_k^{(n)} f \to U_t^{(0)} f$ для всякого $\varphi \in D_{I^{(0)}}$ при $n \to \infty$, $\frac{k}{n} \to t$.*

Доказательство обоих предложений весьма сходно, поэтому докажем только второе.

Доказательство теоремы 4.7. Покажем сначала, что для $\varphi \in D_{I^{(0)}}$

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} U_j^{(n)} \varphi(x) - \int_0^t U_\tau^{(0)} \varphi(x)\, d\tau \right\| \to 0 \text{ при } \frac{k}{n} \to t, \ n \to \infty.$$

Поскольку $\| I_n^{(n)}\varphi - I^{(0)}\varphi \| \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\| e^{-\frac{\lambda}{n}} [n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1) E - I_n^{(n)}] \varphi - (\lambda E - I^{(0)}) \varphi \| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $\| R_n(\lambda, I_n^{(n)}) \| \leqslant \frac{1}{n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1)} < \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$, то

$$\| R_n(\lambda, I_n^{(n)}) e^{-\frac{\lambda}{n}} [(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1) E - I_n^{(n)}] \varphi - R_n(\lambda, I_n^{(n)}) (\lambda E - I^{(0)}) \varphi \| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Положим $(\lambda E - J^{(0)})\varphi = f$. На основании теоремы 1 [13], выбирая соответствующее φ, можно получить любую функцию $f \in B$. Следовательно $\|R(\lambda, I^{(0)})f - R_n(\lambda, I_n^{(n)})f\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $f \in B$. Ввиду того, что $\|I_n^{(n)}\varphi - I^{(0)}\varphi\| \to 0$ для любого $\varphi \in D_{I^{(0)}}$, то также будет $\|R(\lambda, I^{(0)})I^{(0)}\varphi - R_n(\lambda, J_n^{(n)})J_n^{(n)}\varphi\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как

$$1)\ \frac{\frac{e^{\frac{\lambda(k+1)}{n}}}{n}}{\frac{n^2(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)^2}{}} \to \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} \text{ при } \lambda = \gamma + i\omega,\ \frac{k}{n} \to t,\ n \to \infty,$$

причем это стремление равномерно для $|\omega| \leqslant N$, каково бы ни было N;

$$2)\ \left|\frac{1}{\frac{n^2(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)^2}{}}\right| \leqslant \frac{1}{n^2|e^{i\delta}-1|} \text{ для } \pi n > \omega > \delta n;$$

$$3)\ \left|\frac{1}{\frac{n^2(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)^2}{}}\right| \leqslant \frac{1}{\lambda^2(1-\delta)} \text{ для } N < \omega < n\delta;$$

то из (4.3) и (4.6) легко получить, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{k}{n}\to t}} \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} U_j^{(n)}\varphi(x) - \int_0^t U_\tau^{(0)}\varphi(x)\,d\tau \right\| = 0. \tag{4.8}$$

Для $\varphi \in D_{I^{(0)}}$ имеем

$$\|U_\tau^{(0)}\varphi - U_t^{(0)}\varphi\| \leqslant \left\| \frac{U_{|t-\tau|}^{(0)}\varphi - \varphi}{|t-\tau|} \right\| |t-\tau| \leqslant C_\varphi |t-\tau|$$

где C_φ—верхняя грань $\left\| \frac{U_t\varphi - \varphi}{t} \right\|$.

Следовательно

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} U_\tau^{(0)}\varphi\,d\tau - (t_2 - t_1)U_{t_1}^{(0)}\varphi \right\| \leqslant C_\varphi \frac{|t_1 - t_2|^2}{2}. \tag{4.9}$$

Далее $\left\| U_{k_1}^{(n)}\varphi - U_{k_2}^{(n)}\varphi \right\| \leqslant \frac{k_2 - k_1}{n} \left\| I_n^{(n)}\varphi \right\| \leqslant \frac{k_2 - k_1}{n} C'_\varphi$, где C'_φ — верхняя грань $\|I_n^{(n)}\varphi\|$. Значит

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k_1}^{k_2} U_k^{(n)}\varphi - \frac{k_2 - k_1}{n} U_{k_1}^{(n)}\varphi \right\| \leqslant C'_\varphi \frac{|k_2 - k_1|^2}{2n^2}. \tag{4.10}$$

Предположим, что $\overline{\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \frac{k_1}{n}\to t}}} \|U_{k_1}^{(n)}\varphi - U_t^{(0)}\varphi\| > \delta$. Тогда из (4.9) и (4.10) следует,

что

$$\overline{\lim_{n\to\infty,\ \frac{k}{n}\to t}}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=k_1}^{k_2}U_k^{(n)}\varphi-\int_t^{t+\frac{k_2-k_1}{n}}U_\tau^{(0)}\varphi d\tau\right\|\geqslant\delta\frac{k_2-k_1}{n}-[C_\varphi+C'_\varphi]\frac{(k_2-k_1)^2}{2n^2}.$$

Выбирая k_2 так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_2-k_1}{n}=\dfrac{\delta}{C_\varphi+C'_\varphi}$, получим $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k_1}^{k_2}U_l^{(n)}\varphi-\right.$

$$\left.-\int_t^{t+\frac{\delta}{C_\varphi+C'_\varphi}}U_\tau^{(0)}\varphi d\tau\right\|\geqslant\frac{\delta^2}{2(C_\varphi+C'_\varphi)},$$

что противоречит (4.8). Для доказательства теоремы теперь нужно лишь воспользоваться тем, что $D_{I^{(0)}}$ всюду плотно в B (см., например, [13], п. 6).

Часто приходится иметь дело со слабыми инфинитезимальными операторами. Тогда могут оказаться полезными следующие теоремы:

4.8. Теорема. *Пусть $U_t^{(n)}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ — последовательность слабо непрерывных полугрупп, таких что $\|U_t^{(n)}\|\leqslant 1$. Обозначим $\widetilde{I}^{(n)}$ слабый инфинитезимальный оператор полугруппы $U_t^{(n)}$. Если $\widetilde{I}^{(n)}$ для всякого $\varphi\in D_{\widetilde{I}^{(0)}}$ сильно сходится к $\widetilde{I}^{(0)}\varphi$, то $U_t^{(n)}\varphi$ для каждого $\varphi\in D_{I^{(0)}}$ сильно сходится к $U_t^{(0)}\varphi$.*

4.9. Теорема. *Пусть $U_k^{(n)}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ — последовательность дискретных полугрупп, причем $\|U_k^{(n)}\|\leqslant 1$, а $U_t^{(0)}$ слабо непрерывная полугруппа, $\|U_t^{(0)}\|\leqslant 1$. Пусть $\widetilde{I}^{(0)}$ — слабый инфинитезимальный оператор $U_t^{(0)}$, а*

$$I_n^{(n)}\varphi=n(U_1^{(n)}-E)\varphi.$$

Если $I_n^{(n)}\varphi$ для всякого $\varphi\in D_{\widetilde{I}^{(0)}}$ сильно сходится к $\widetilde{I}^{(0)}\varphi$, то $U_k^{(n)}\varphi$ сильно сходится к $U_t^{(0)}\varphi$ при $\varphi\in D_{\widetilde{I}^{(0)}}$, $n\to\infty$, $\dfrac{n}{k}\to t$.

Доказательство этих предложений можно получить, почти дословно повторяя приведенное выше доказательство 4.7.

4.10. Замечание. Неудобство теорем 4.6—4.9 заключается в том, что для их применения нужно знать полную область определения инфинитезимального оператора предельной полугруппы. Часто ее трудно установить, но легко установить, что для некоторого класса функций K оператор I определен и имеет вполне определенный вид. Если проследить доказательство теоремы 4.7, то легко убедиться в справедливости следующего утверждения: если в условиях теоремы 4.7 имеем $I_n^{(n)}\varphi\to I^{(0)}\varphi$ не для всех $\varphi\in D_{I^{(0)}}$, а лишь для $\varphi\in K$, где K — некоторое подмножество $D_{I^{(0)}}$, а f таково, что $R(\lambda,\ I^{(0)})f\in K$ для всех λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda>\delta$, где δ некоторое положительное число, то $U_k^{(n)}f\to U_t^{(0)}f$ при $n\to\infty$, $\dfrac{k}{n}\to t$. Аналогичные утверждения соответствуют также теоремам 4.6, 4.7 и 4.9.

§ 5. Предельные теоремы для переходных вероятностей и конечномерных распределений марковских процессов

В этом параграфе мы будем иметь дело либо с последовательностью однородных по времени марковских процессов $\xi_n(t)$, и тогда будет предполагаться, что для этих процессов выполняется условие ПВ, $P_n(t, x, A)$ будет обозначать марковскую переходную функцию процесса $\xi_n(t)$, а $U_t^{(n)}$ — полугруппу, определяемую равенством $U_t^{(n)} f(x) = \int f(y) P_n(t, x, dy)$ и $\tilde{I}^{(n)}$ — слабый инфинитезимальный оператор этой полугруппы, либо мы будем иметь дело с последовательностью цепей Маркова $\xi_{n,0}, \xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$, при этом переходную вероятность за k шагов в n-ой цепи мы будем обозначать $P_n^k(x, A)$, и определим величины $U_k^{(n)} f(x) = \int P_n^k(x, dy) f(y)$, $I_n^{(n)} f(x) = n\left(\int P_n'(x, dy) f(y) - f(x)\right)$. Процессы, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, будут предполагаться удовлетворяющими следующему условию:

5.1. Условие Д. Марковский процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условию Д, если его переходная марковская функция $P(t, x, A)$ удовлетворяет условию ПВ и для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ с ограниченными до второго порядка включительно производными слабый инфинитезимальный оператор определен, причем если $x^1, x^2, \ldots, x^m$ — координаты точки x, а $y^1, y^2, \ldots, y^m$ — координаты точки y, то

$$\text{Д. I)} \qquad \tilde{I}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum b_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \sum a_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \int\limits_{|x-y|>1} [\varphi(y) - \varphi(x)]\,\Pi(x, dy) + \int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\left[\varphi(y) - \varphi(x) - \sum\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}(y^i - x^i)\right]\Pi(x, dy), \tag{5.1}$$

где матрица, составленная из $b_{ij}(x)$, при любом x является неотрицательной симметричной, $\Pi(x, A)$ — положительная мера в $R^{(m)}$ при всяком фиксированном x, такая, что мера каждого множества, лежащего при некоторой окрестности x, конечна, $\int\limits_{|x-y|\leqslant 1}\sum(x^i - y^i)^2\,\Pi(x, dy) < \infty$ равномерно по x и величина $\Pi(x, V_r(x))$ равномерно ограничена по x ($V_r(x)$ здесь обозначает внешность r-окрестности точки x), $\lim\limits_{r\to\infty}\Pi(x, V_r(x)) = 0$ равномерно по x; кроме того, если $\Gamma(t)$ произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная вместе со своими производными до второго порядка включительно, причем $\Gamma(t) = t$ для $|t| \leqslant 2$, то

$$b_{ij}(x) + \int\Gamma(x^i - y^i)\Gamma(x^j - y^j)\,\Pi(x, dy) \text{ и } a_i(x) + \int\limits_{|x-y|>1}\Gamma(x^i - y^i)\,\Pi(x, dy)$$

непрерывны; наконец, если $\varphi(y)$ — непрерывная ограниченная функция и

$\varphi(y)$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки x, а $x_n \to x$, то и

$$\int \varphi(y)\,\Pi(x_n,\ dy) \to \int \varphi(y)\,\Pi(x,\ dy).$$

Д. II) Пусть $R(\lambda,\ \tilde{I})$ обозначает резольвенту слабого инфинитезимального оператора $\tilde{I}$, тогда множество $D^{(2)}$ всех дважды равномерно непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими производными до второго порядка включительно, переводится оператором $R(\lambda,\ \tilde{I})$ для всех λ, вещественная часть которых не менее некоторого положительного числа δ, само в себя.

Условие Д.II выполняется, например, в следующих двух случаях: если $D^{(2)}$ является полной областью определения оператора $\tilde{I}$, тогда область значений $R(\lambda,\ \tilde{I})$ будет при любом λ совпадать с $D^{(2)}$; или если существует такое M, что для всякой функции, для которой

$$\max\left(\|\varphi\|,\ \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right\|,\ \left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right\|\right) \leqslant 1,\quad \max\left(\left\|\int \varphi(y)\,P(t,x,dy)\right\|,\right.$$

$$\left.\left\|\frac{\partial}{\partial x^i}\int \varphi(y)\,P(t,x,dy)\right\|,\ \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\int \varphi(y)\,P(t,x,dy)\right\|\right) \leqslant M,$$

для $0 < t \leqslant 1$. Действительно, в последнем случае

$$\max\left(\left\|\int \varphi(y)\,P(t,x,dy)\right\|,\ \left\|\frac{\partial}{\partial x^i}\int \varphi(y)\,P(t,x,dy)\right\|,\ \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\int \varphi(y)\,P(t,x,dy)\right\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant (M+1)^{t+1}$$

и поэтому для $\operatorname{Re}\lambda > \ln(M+1)$ интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int P(t,\ x,\ dy)\,\varphi(y)\,dy\,dt$ можно будет дважды дифференцировать под знаком интеграла (внешнего).

Марковские процессы с инфинитезимальными операторами, определенными равенством (5.1), рассматривались в [14]. Существование марковских процессов с инфинитезимальными операторами (5.1) следует при некоторых предположениях из результатов Ито [19], в общем же это еще не изученный вопрос. Сейчас также нет эффективных условий, позволяющих судить о выполнимости условия Д. Это условие выполняется для процессов с независимыми приращениями. Для некоторых частных случаев условие Д. II вытекает из результатов И. И. Гихмана [20] о дифференцируемости переходных вероятностей процесса (точнее самого процесса, по начальным данным). Весьма вероятно, что условие Д. II будет выполняться, если $\Pi(x,\ A)$, $b_{ij}(x)$ и $a_i(x)$ будут достаточно гладкими по x.

5.2. Условия сходимости I. Обозначим $\Gamma(t)$ произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию, такую что $|\Gamma(t)| \leqslant t$, $\Gamma(t) = t$ при $|t| \leqslant 1$ и $\Gamma(t) = 0$ при $|t| \geqslant 2$. Пусть $\tilde{I}^{(n)}$ записываются по формуле (5.1), если в ней b_{ij}, a_i и $\Pi(x,\ A)$ заменить соответственно на $b_{ij}^{(n)}(x)$, $a_i^{(n)}(x)$ и $\Pi^{(n)}(x,\ dy)$. Условия сходимости I выполняются, если

1) Для всякой непрерывной и ограниченной функции φ, обращающейся

в нуль в некоторой окрестности нуля, равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty}\int \Pi^{(n)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y)=\int \Pi^{(0)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y). \tag{5.2}$$

2) Равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty}[a_i^{(n)}(x)+\int\limits_{|x-y|\geqslant 1}\Gamma(y^i-x^i)\,\Pi^{(n)}(x,\ dy)]=[a_i^{(0)}(x)+$$

$$+\int\limits_{|x-y|\geqslant 1}\Gamma(y^i-x^i)\,\Pi^{(0)}(x,\ dy)]. \tag{5.3}$$

3) Для каждого $\varepsilon>0$ равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty}\left[b_{ij}^{(n)}(x)+\varepsilon^2\int\Gamma\left(\frac{y^i-x^i}{\varepsilon}\right)\Gamma\left(\frac{y^j-x^j}{\varepsilon}\right)\Pi^{(n)}(x,\ dy)\right]=$$

$$=b_{ij}^{(0)}(x)+\varepsilon^2\int\Gamma\left(\frac{y^i-x^i}{\varepsilon}\right)\Gamma\left(\frac{y^j-x^j}{\varepsilon}\right)\Pi^{(0)}(x,\ dy). \tag{5.4}$$

5.3. Лемма. *При выполнении условий* 5.2 *последовательность* $\widetilde{T}^{(n)}\varphi$ *для всякого* $\varphi\in D^{(2)}$ *равномерно по* x *сходится к* $\widetilde{T}^{(0)}\varphi$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\sup\limits_n \Pi^{(n)}(x,\ V_r(x))$ равномерно ограничен при каждом r и стремится к 0 при $r\to\infty$. Для этого рассмотрим неотрицательную функцию φ, обращающуюся в нуль в r 2-окрестности точки 0 и равную 1 вне r-окрестности точки 0. Тогда

$$\Pi^{(n)}(x,\ V_r(x))\leqslant\int\Pi^{(n)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y).$$

Так так $\int\Pi^{(n)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y)$ стремится равномерно к $\int\Pi^{(0)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y)$, а $\int\Pi^{(0)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y)\leqslant\Pi^{(0)}(x,\ V_{r/2}(x))$, последняя же величина ограничена по x ввиду условия Д. I, то

$$\lim_{r\to\infty}\sup_n\sup_x\Pi^{(n)}(x,\ V_r(x))=0. \tag{5.5}$$

Обозначим F класс функций, обращающихся в нуль в ε-окрестности 0 и вне r-окрестности 0, равностепенно непрерывных и ограниченных одной и той же постоянной. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\varphi\in F}\sup_x\left|\int\Pi^{(n)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y)-\int\Pi^{(0)}(x,\ dy)\,\varphi(x+y)\right|=0. \tag{5.6}$$

Действительно, если бы это было не так, то существовало бы число δ и последовательности n_k и $\varphi_{n_k}\in F$, такие что

$$\sup_x\left|\int\Pi^{(n_k)}(x,\ dy)\,\varphi_{n_k}(x+y)-\int\Pi^{(0)}(x,\ dy)\,\varphi_{n_k}(x+y)\right|>\delta.$$

Но ввиду компактности F можно, не ограничивая общности, считать, что $\varphi_{n_k}(x)$ сходятся равномерно к некоторой функции $\varphi_0(x)$, и так как

$$\sup_x \left| \int \Pi^{(n_k)}(x, dy)\, \varphi_{n_k}(x+y) - \int \Pi^{(n_k)}(x, dy)\, \varphi_0(x+y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_0(x)| \sup_x \Pi^{(n_k)}(x, V_\varepsilon(x))$$

и второй множитель в левой части последнего равенства ограничен по n_k, а кроме того

$$\sup_x \left| \int \Pi^{(0)}(x, dy)\, \varphi_{n_k}(x+y) - \int \Pi^{(0)}(x, dy)\, \varphi_0(x+y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_0(x)| \sup_x \Pi^{(0)}(x, V_\varepsilon(x)),$$

то должно быть также

$$\overline{\lim_{n_k \to \infty}} \sup_x \left| \int \Pi^{(n_k)}(x, dy)\, \varphi_0(x+y) - \int \Pi^{(0)}(x, dy)\, \varphi_0(x+y) \right| \geqslant \delta,$$

что противоречит (5.2). Из (5.6) и (5.5) легко вывести, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\varphi \in F'} \sup_x \left| \int \Pi^{(n)}(x, dy)\, \varphi(x+y) - \int \Pi^{(0)}(x, dy)\, \varphi(x+y) \right| = 0, \quad (5.7)$$

где F' — множество равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций, обращающихся в нуль в ε-окрестности точки 0. Рассмотрим теперь $I^{(n)}\varphi$. Мы можем переписать его следующим образом:

$$I^{(n)}\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\sum \left[b_{ij}^{(n)}(x) + \varepsilon^2 \int \Gamma\left(\frac{y^i - x^i}{\varepsilon}\right) \Gamma\left(\frac{y^j - x^j}{\varepsilon}\right) \Pi^{(n)}(x, dy) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right) +$$

$$+ \sum \left(a_i^{(n)}(x) + \int\limits_{|x-y|>1} \Gamma(y^i - x^i)\, \Pi^{(n)}(x, dy) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} +$$

$$+ \int \left[\varphi(y) - \varphi(x) - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Gamma(y^i - x^i) - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum \Gamma\left(\frac{x^i - y^i}{\varepsilon}\right) \Gamma\left(\frac{x^j - y^j}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \right.$$

$$- \varepsilon \Gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left[\varphi(y) - \varphi(x) - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Gamma(y^i - x^i) - \frac{\varepsilon^2}{2} \Gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}(x^i - y^i)\right) \Gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}(x^j - y^j)\right) \times \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right] \right) \Pi^{(n)}(x, dy) + \varepsilon \int \Gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left[\varphi(y) - \varphi(x) - \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Gamma(y^i - x^i) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{2} \Gamma\left(\frac{x^i - y^i}{\varepsilon}\right) \Gamma\left(\frac{x^j - y^j}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Pi^{(n)}(x, dy). \quad (5.8)$$

Первое и второе слагаемые стремятся равномерно по x соответственно к

$$\frac{1}{2}\left(\sum \left(b_{ij}^{(0)}(x) + \varepsilon^2 \int \Gamma\left(\frac{x^i - y^i}{\varepsilon}\right) \Gamma\left(\frac{x^j - y^j}{\varepsilon}\right) \Pi^{(0)}(x, dy) \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right.$$

и

$$\sum a_i^{(0)}(x) + \int\limits_{|x-y|>1} \Gamma(y^i - x^i)\, \Pi^{(0)}(x, dy) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

ввиду условий (5.2) и (5.3). Третье слагаемое равномерно сходится к точно такому же слагаемому, в котором $\Pi^{(n)}(x, dy)$ заменено на $\Pi^{(0)}(x, dy)$, ввиду (5.7), так как подинтегральное выражение является равностепенно не-

прерывным и равномерно ограниченным и обращается в нуль в ε-окрестности точки 0. Последнее, четвертое слагаемое может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно малого $\varepsilon > 0$, так как подинтегральная функция является величиной $o(|x-y|)^2$ равномерно по x, а $\sup_n \int\limits_{|x-y|<1} |x-y|^2 \Pi^{(n)}(x, dy)$ равномерно ограничено по x в силу (5.4). Так как (5.8) справедливо и при $n=0$, то из выше сказанного получаем доказательство леммы.

Особенно интересен тот случай, когда $I^{(n)}\varphi = n \int [\varphi(y) - \varphi(x)] P_n(x, dy)$, где $P_n(x, dy)$ — вероятность перехода за один шаг в цепи Маркова. Переформулировав для этого случая 5.2, получаем

5.4. Условия сходимости II. Пусть $\tilde{I}^{(0)}\varphi$ удовлетворяет условию Д.I и записывается по формуле (5.1), а $I^{(n)}\varphi(x) = n \int P_n(x, dy)(\varphi(y) - \varphi(x))$, где $P_n(x, A)$ — вероятность перехода за один шаг в цепи Маркова. Мы будем говорить, что выполняются условия сходимости II, если

1) Для всякой функции $\varphi(x)$ непрерывной ограниченной и обращающейся в нуль в некоторой окрестности 0, равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty} n \int P_n(x, dy)\varphi(x+y) = \int \Pi^{(0)}(x, dy)\varphi(x+y). \tag{5.9}$$

2) Равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty} n \int\limits_{|y-x|>1} \Gamma(y^i - x^i) P_n(x, dy) = a_i^{(0)}(x) + \int\limits_{|y-x|>1} \Gamma(y^i - x^i)\Pi^{(0)}(x, dy). \tag{5.10}$$

3) Для каждого $\varepsilon > 0$, равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty} n\varepsilon^2 \int \Gamma\left(\frac{y^i - x^i}{\varepsilon}\right)\Gamma\left(\frac{y^j - x^j}{\varepsilon}\right) P_n(x, dy) = b_{ij}^{(0)} +$$

$$+ \varepsilon^2 \int \Gamma\left(\frac{y^i - x^i}{\varepsilon}\right)\Gamma\left(\frac{y^j - x^j}{\varepsilon}\right)\Pi^{(0)}(x, dy) \tag{5.11}$$

($\Gamma(t)$ обозначает ту же функцию, что и в 5.2).

Из леммы 5.3 немедленно следует

5.5. Лемма. *При выполнении условий* 5.4 $I_\varphi^{(n)} \to \tilde{I}_\varphi^{(0)}$ *для каждого* $\varphi \in D^{(2)}$ *равномерно по* x.

Утверждения 5.3 и 5.5 и результаты § 4 позволяют сформулировать следующие теоремы о сходимости конечномерных распределений однородных марковских процессов.

5.6. Теорема. *Пусть для последовательности однородных марковских процессов* $\xi_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, *выполняется условие* Д. I, *а для процесса* $\xi_0(t)$ *условия* Д. I *и* Д. II, *для последовательности слабых инфинитезимальных операторов процессов* $\xi_n(t)$; $n=0, 1, \ldots$ *выполнены условия сходимости* I *и кроме того распределение* $\xi_n(0)$ *слабо сходится к распределению* $\xi_0(0)$. *Тогда конечномерные распределения процессов* $\xi_n(t)$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\xi_0(t)$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n(0)\in A_0,\ \xi(t_1)\in A_1,\ \ldots,\xi_n(t_k)\in A_k\} = P\{\xi_0(0)\in A_0,\ \xi_0(t_1)\in A_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \xi_0(t_k)\in A_k\}$$

для всех k, $t_0=0<t_1<\ldots<t_k$ *и борелевских множеств* $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *таких, что* $\mathbf{P}\{\xi_0(t_i)\in \bar{A}_i\cap \overline{R^{(m)}\setminus A_i}\}=0$, $i=0, 1, \ldots, k$; $t_0=0$ ($\bar{A}$ — замыкание A).

5.7. Теорема. *Пусть* $\xi_{n,0}, \xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$; $n=1, 2, \ldots$ — *последовательность однородных цепей Маркова с переходной вероятностью за один шаг в* n*-ой цепи*

$$P_n(x, A)$$

такой, что для каждой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$ *будет непрерывным также и выражение* $\int P_n(x, dy)\varphi(y)$. *Рассмотрим марковские процессы, определенные соотношениями:*

$$\xi_n(t)=\xi_{n,k},\ \text{если}\ \frac{k}{n+1}\leqslant t<\frac{k+1}{n+1},\ \xi_n(1)=\xi_{n,n}.$$

Пусть далее для однородного марковского процесса $\xi_0(t)$ *выполнено условие* Д, *а для* $P_n(x, A)$ *и слабого инфинитезимального оператора процесса* $\xi_0(t)$ *условие сходимости* II *и кроме того распределение* $\xi_n(0)$ *слабо сходится к распределению* $\xi_0(0)$. *Тогда конечномерные распределения процессов* $\xi_n(t)$ *сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\xi_0(t)$.

Обе эти теоремы доказываются совершенно одинаково. Докажем первую Нам понадобится следующая

5.8. Лемма. *Пусть последовательность мер* μ_n, *определенных на борелевских множествах* R^m, *сходится (слабо) к мере* μ_0. *Если последовательность переходных вероятностей* $P_n(x, A)$; $n=1, 2, \ldots$, *такова, что* $\int P_n(x, dy)\varphi(y)$ *равномерно сходится к* $\int P_0(x, dy)\varphi(y)$ *для каждой* $\varphi\in D^{(2)}$, *то тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_B P_n(x, A)\mu_n(dx)=\int_B P_0(x, A)\mu_0(dx)$$

для всех борелевских множеств A *и* B, *для которых*

$$\mu_0(\overline{B\cap R^{(m)}\setminus B})=0 \quad \text{и} \quad \int P_0(x, \overline{A\cap R^{(m)}\setminus A})\mu_0(dx)=0.$$

Доказательство. Легко видеть, что, если для множества B выполнено условие $\mu_0(\overline{B\cap R^{(m)}\setminus B})=0$, то последовательность мер $\mu_n'(G)=\mu_n(G\cap B)$ слабо сходится к мере $\mu_0'(G)=\mu_0(G\cap B)$. Для всякой $\varphi\in D^{(2)}$ имеем

$$\int P_n(x, dy)\varphi(y)\to\int P_0(x, dy)\varphi(y)$$

равномерно по x, поэтому

$$\left|\int_B \mu_n(dx)\int P_n(x, dy)\varphi(y)-\int_B \mu_0(dx)\int P_0(x, dy)\varphi(y)\right|$$

$$\leqslant \left|\int_B \mu_n(dx)\left(\int P_n(x, dy)\varphi(y) - \int P_0(x, dy)\varphi(y)\right)\right| +$$

$$+ \left|\int \mu_n'(dx)\int P_0(x, dy)\varphi(y) - \int \mu_0'(dx)\int P_0(x, dy)\varphi(y)\right|,$$

где первое слагаемое стремится к нулю, так как $\mu_n(B)$ ограничены, а подинтегральная функция стремится равномерно по x к нулю, второе же слагаемое стремится к нулю, так как мера μ_n' слабо сходится к μ_0'. Поэтому для любой функции φ из $D^{(2)}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_B \mu_n(dx)\int P_n(x, dy)\varphi(y) = \int_B \mu_0(dx)\int P_0(x, dy)\varphi(y).$$

Беря последовательность функций $\varphi_n(x)$ из $D^{(2)}$, сходящуюся к характеристической функции множества $\bar{A}$, можем получить

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_B \mu_n(dx)\,P_n(x, \bar{A}) \leqslant \int_B \mu_0(dx)\,P_0(x, \bar{A}).$$

Аналогично

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_B \mu_n(dx)\,P_n(x, \overline{R^{(m)}\setminus A}) \leqslant \int_B \mu_0(dx)\,P_0(x, \overline{R^{(m)}\setminus A}).$$

Из этих двух неравенств легко выводится, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_B \mu_n(dx)\,P_n(x, A) = \int_B \mu_0(dx)\,P_0(x, A), \text{ так как}$$

$$\int \mu_0(dx)\,P(x, \bar{A}\cap\overline{R^{(m)}\setminus A}) = 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.6. Из теоремы 4.10 следует, что соотношение $\lim_{n-\infty}\int P^{(n)}(t, x, dy)\varphi(y) = \int P^{(0)}(t, x, dy)\varphi(y)$, где $P^{(n)}(t, x, A)$ — переходные вероятности процесса $\xi_n(t)$, выполнено для всех $\varphi\in D^{(2)}$ равномерно по x при любом t. Для доказательства теоремы применим лемму 5.8 и проведем его по индукции. Для $k=0$ теорема верна. Предположим, что теорема верна для $k=p$ и покажем, что она будет верна и для $k=p+1$. Пусть $0=t_0<t_1<\ldots<t_p<t_{p+1}$, по предположению индукции меры

$$\mu_n(A) = \mathbf{P}\{\xi_n(0)\in A_0,\ \xi_n(t_1)\in A_1, \ldots, \xi_n(t_p)\in A_p\cap A\}$$

слабо сходятся к мере $\mu_0(A) = \mathbf{P}\{\xi_0(0)\in A_0, \ldots, \xi_0(t_p)\in A_p\cap A\}$, если A удовлетворяют условию теоремы. Кроме того $\int P^{(n)}(t_{p+1}-t_p, x, dy)\varphi(y)$ равномерно сходятся к $\int P^{(0)}(t_{p+1}-t_p, x, dy)\varphi(y)$ для каждой $\varphi\in D^{(2)}$.

Значит выполнены условия леммы 5.8 и значит $\mathbf{P}\{\xi_n(t_0)\in A_0, \ldots, \xi_n(t_{p+1})\in A_{p+1}\} \to \mathbf{P}\{\xi_0(0)\in A_0, \ldots, \xi_0(t_{p+1})\in A_{p+1}\}$ при $n\to\infty$. Теорема доказана.

§ 6. Еще одна предельная теорема для конечномерных распределений

Рассмотренные в § 5 предельные теоремы для конечномерных распределений удобны тем, что условия этих теорем выражены в терминах переходных вероятностей за один шаг или инфинитезимальных операторов процессов. Правда при этом было наложено довольно жесткое условие, именно условие равномерной по всему пространству сходимости инфинитезимальных операторов.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда сходимость инфинитезимальных операторов будет равномерна на каждом компакте. При этом приходится накладывать на допредельные процессы некоторые дополнительные условия.

6.1. Теорема *Пусть* $I^{(n)}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ — *сильные инфинитезимальные операторы процессов* $\xi_n(t)$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, *переходные вероятности которых удовлетворяют условию* ПВ, *причем* $I^{(n)}\varphi$ *определены для всех* $\varphi \in D_{I^{(0)}}$ *и существует постоянная* C, *такая что* $|I^{(n)}\varphi| \leqslant C$ *для всех* n. *Тогда, если*

1) *для всех* $\varphi \in D_{I^{(0)}}$ *равномерно на каждом компакте* $I^{(n)}\varphi \to I^{(0)}\varphi$,

2) *для любых* $\varepsilon > 0$, *компакта* K *и* $T > 0$, *можно указать такое* r, *что для всех* n, $t \leqslant T$ *и* $x \in K$ *будет* $P^{(n)}(t, x, V_r(0)) < \varepsilon$ ($V_r(0)$—*внешность сферы радиуса* r *с центром в начале координат*),

3) *распределение* $\xi_n(0)$ *слабо сходится к распределению* $\xi_0(0)$;

Конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\xi_0(t)$.

Доказательство. Обозначим $G_\lambda^{(n)}(x, A)$ функцию, определяемую формулой

$$G_\lambda^{(n)}(x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^{(n)}(t, x, A)\, dt.$$

Очевидно, что резольвента $R(\lambda, I^{(n)})$ оператора $I^{(n)}$ определяется следующим образом через $G^{(n)}(x, A)$:

$$R(\lambda, I^{(n)}) f(x) = \int f(y)\ \ G_\lambda^{(n)}(x, dy).$$

Из условия 2) теоремы вытекает, что для любых компакта K и $\varepsilon > 0$ можно указать такое r, что $G_\lambda^{(n)}(x, V_r(0)) < \varepsilon$ для всех $x \in K$. Поэтому, если $\psi_n(x)$ — последовательность ограниченных в совокупности функций, сходящаяся равномерно на каждом компакте к нулю, то $R(\lambda, I^{(n)})\psi_n(x) \to 0$ равномерно на каждом компакте. Из условия 1) теоремы следует, что каково бы ни было $\varphi \in D_{I^{(0)}}$

$$\lambda\varphi(x) - I^{(n)}\varphi(x) \to \lambda\varphi(x) - I^{(0)}\varphi(x)$$

равномерно на каждом компакте. Поэтому

$$R(\lambda, I^{(n)})(\lambda\varphi - I^{(n)}\varphi - \lambda\varphi(x) + I^{(0)}\varphi(x))$$

также стремится к нулю равномерно на каждом компакте. Полагая $\lambda\varphi(x) - I^{(0)}\varphi(x) = f(x)$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}[R(\lambda, I^{(0)})f(x) - R(\lambda, I^{(0)})f(x)] = 0$ равномерно на каждом компакте для любой функции, представимой в виде $f(x) = \lambda\varphi(x) - I^{(0)}\varphi(x)$, где $\varphi \in D_{I^{(0)}}$, т. е. для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$. Но из того, что $R(\lambda, I^{(n)})f(x)$ стремится к $R(\lambda, I^{(0)})f(x)$ равномерно на каждом компакте, можно точно такими же рассуждениями, как при доказательстве 4.7, вывести, что для всякой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}\int P^{(n)}(t, x, dy)f(y) = \int P^{(0)}(t, x, dy)f(y)$ равномерно на каждом компакте. Пусть теперь $m_n(A)$ — распределение $\xi_n(0)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что какова бы ни была ограниченная непрерывная функция $k+1$ переменных (каждая переменная — вектор в m-мерном пространстве) и каковы бы ни были точки $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x_0, x_1, \ldots, x_k)P_n(t_1, x_0, dx_1)\ldots P_n(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, dx_k)m_n(dx_0) =$$

$$= \int f(x_0, \ldots, x_k)m_0(dx_0)P_0(t_1, x_0, dx_1)\ldots P_0(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, dx_k). \quad (6.1)$$

Докажем сначала 6.1 для того случая, когда $f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = f_0(x_0)f_1(x_1)\ldots f_k(x_k)$. Доказательство будет опираться на следующую лемму.

6.2. Лемма. *Если последовательность ограниченных непрерывных функций $\psi_n(x)$ сходится равномерно на каждом компакте к $\psi_0(x)$, то равномерно на каждом компакте $\int\psi_n(y)P_n(t, x, dy)$ сходится к $\int\psi_0(y)P_0(t, x, dy)$.*

Доказательство. Пусть K — произвольный компакт. Выберем такое r, чтобы $P_n(t, x, V_r(0)) < \varepsilon$ для всех $x \in K$. Тогда

$$\int[\psi_n(y) - \psi_0(y)]P_n(t, x, dy) = \int\limits_{R^{(m)}\setminus V_r(0)}[\psi_n(y) - \psi_0(y)]P_n(t, x, dy) +$$

$$+ \int\limits_{V_r(0)}[\psi_n(y) - \psi_0(y)]P_n(t, x, dy).$$

Первый интеграл стремится к нулю, так как $\psi_n(y) - \psi_0(y)$ стремится к нулю равномерно на каждом компакте, а второй интеграл не превосходит $2C\varepsilon$, если $|\psi_n(y)| \leqslant C$. Таким образом $\int(\psi_n(y) - \psi_0(y))P_n(t, x, dy) \to 0$ равномерно на каждом компакте, а по уже доказанному

$$\int\psi_0(y)P_n(t, x, dy) \to \int\psi_0(y)P_0(t, x, dy)$$

равномерно на каждом компакте. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Индукцией по k легко доказывается, что

$$\Phi_n(x_0) = \int f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_k(x_k)P_n(t_1, x_0, dx_1)\ldots P_n(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, dx_k)$$

сходится к $\Phi(x_0) = \int f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_k(x_k) P_0(t_1, x_0, dx_1) \ldots P_0(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, dx_k)$ равномерно на каждом компакте относительно x_0. Так как $\Phi_n(x_0)$ являются равномерно ограниченными, то

$$\int \Phi_n(x_0) f_0(x_0) m_n(dx_0) \to \int \Phi_0(x_0) f_0(x_0) m_0(dx_0).$$

Таким образом соотношение (6.1) справедливо для функций $f(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ вида

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{l} f_0^{(j)}(x_0) \ldots f_k^{(j)}(x_k). \tag{6.2}$$

Заметим теперь, что всякую непрерывную ограниченную функцию $f(x_0, \ldots, x_k)$ можно приблизить равномерно на каждом компакте функциями вида (6.2), так чтобы верхняя грань модуля не превосходила верхней грани модуля $f(x_0, \ldots, x_k)$. Отсюда легко вывести уже, что (6.1) будет выполняться для всякой непрерывной ограниченной функции. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

6.3. Теорема. *Пусть $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}$ — последовательность однородных цепей Маркова и $P_n(x, A)$ — переходная вероятность за один шаг в n-ой цепи. Пусть далее $\xi_0(t)$ — процесс, удовлетворяющий условию* ПВ. *Тогда, если*

1) $\int P_n(x, dy) f(y)$ *непрерывен по x для всякой непрерывной ограниченной функции* $f(x)$;

2) $n \int P_n(x, dy)(\varphi(y) - \varphi(x)) \to I^{(0)}\varphi$, *для всякой* $\varphi \in D_{I^{(0)}}$, *где* $I^{(0)}$ — *инфинитезимальный оператор процесса* $\xi_0(t)$ *и* $n \int P_n(x, dy)(\varphi(y) - \varphi(x))$ *ограничены в совокупности для каждого* $\varphi \in D_{I^{(0)}}$;

3) *для всякого* $\varepsilon > 0$, *компакта* K *и* $T > 0$ *можно указать такое* r, *что для всех* n, $\frac{k}{n} \leqslant T$, $x \in K$, *будет* $P_n^k(x, V_r(0)) < \varepsilon$;

4) *распределения* $\xi_0^{(n)}$ *слабо сходятся к распределению* $\xi_0(0)$;

то конечномерные распределения процесса $\xi_n(t)$, *определенного равенствами* $\xi_n(t) = \xi_k^{(n)}$ *для* $\frac{k-1}{n} \leqslant t < \frac{k}{n}$, *сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\xi_0(t)$.

6.4. Замечания.

1. В условии 1) теоремы 6.1 и условии 2) теоремы 6.3 можно вместо сходимости инфинитезимальных операторов для всех $\varphi \in D_{I^{(0)}}$, рассмотреть сходимость инфинитезимальных операторов лишь для некоторого множества $D \subset D_{I^{(0)}}$, такого что 1) $R(\lambda, I^{(0)})\varphi \in D$ для каждого $\varphi \in D$, 2) для всякой непрерывной ограниченной функции f, каждого $\varepsilon > 0$ и компакта K найдется $\varphi \in D$ такая, что $\sup_{x \in K} |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ и $\sup_x |\varphi(x)| \leqslant \sup_x |f(x)|$.

2. Вместо сильных инфинитезимальных операторов в формулировках 6.1 и 6.3 можно рассматривать слабые инфинитезимальные операторы $\tilde{I}^{(n)}$. Наиболее уместным в этом случае был бы инфинитезимальный оператор,

определенный следующим образом: φ принадлежит области определения инфинитезимального оператора, если величины $\frac{\int P(t, x, dy)\varphi(y) - \varphi(x)}{t}$ ограничены по t и x, и $\frac{1}{t}\left[\int P(t, x, dy)\varphi(y) - \varphi(x)\right] \to \psi(x)$ равномерно на каждом компакте. Последний предел и есть значение оператора на φ.

Найдем условия, выраженные в терминах переходных вероятностей за один шаг, достаточные для выполнения условия 3 теоремы 6.3.

6.5. Теорема. *Пусть имеется последовательность цепей Маркова* $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}, \ldots$ *причем переходная вероятность за один шаг в n-ой цепи удовлетворяет условиям:*

1) *Существует такое C, что при некотором* $\varepsilon > 0$

$$n\left|\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}(x-y)P_n(x, dy)\right| \leqslant C, \tag{6.3}$$

$$n\left|\int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon}(x-y)^2P_n(x, dy)\right| \leqslant C, \tag{6.4}$$

$$\sup_x nP_n\left(x, V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\right) \leqslant C. \tag{6.5}$$

2) *Равномерно на каждом компакте* $\lim\limits_{r\to\infty}\sup\limits_n nP_n(x, V_r(x)) = 0$.

Тогда равномерно на каждом компакте K, для каждого $T > 0$

$$\lim_{r\to\infty}\sup_n\sup_{0\leqslant l\leqslant nT} nP_n^l(x, V_r(x)) = 0. \tag{6.6}$$

Доказательство. Оценим вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi_l^{(n)} - \xi_0^{(n)}\right| > 2r \mid \xi_0^{(n)} = x\right\}.$$

Введем величины

$$\eta_{k,n}^{[\varepsilon]} = \begin{cases} \xi_k^{(n)} - \xi_{k-1}^{(n)}, & \left|\xi_k^{(n)} - \xi_{k-1}^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \left|\xi_k^{(n)} - \xi_{k-1}^{(n)}\right| > \varepsilon; \end{cases} \quad \bar{\eta}_{k,n}^{[\varepsilon]} = \begin{cases} \xi_k^{(n)} - \xi_{k-1}^{(n)}, & \left|\xi_k^{(n)} - \xi_{k-1}^{(n)}\right| > \varepsilon, \\ 0, & \left|\xi_k^{(n)} - \xi_{k-1}^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\xi_l^{(n)} - \xi_0^{(n)} = \sum_1^l \eta_{k,n}^{[\varepsilon]} + \sum_1^l \bar{\eta}_{k,n}^{[\varepsilon]}.$$

Оценим $\mathbf{P}\left\{\left|\sum\limits_1^l \eta_{n,k}^{[\varepsilon]}\right| > r \mid \xi_0^{(n)} = x\right\}$ и $\mathbf{P}\left\{\left|\sum\limits_1^l \bar{\eta}_{n,k}^{[\varepsilon]}\right| > r \mid \xi_0^{(n)} = x\right\}$.

Для оценки первой вероятности рассмотрим величину

$$a_k = \sup_x \mathbf{M}_x\left(\sum_1^k \eta_{n,k}^{[\varepsilon]}\right)^2,$$

где $\mathbf{M}_x$ обозначает условное математическое ожидание при условии, что $\xi_0^{(n)} = x$. Имеем:

$$\mathbf{M}_{x_0}\Big(\sum_{j=1}^{k}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big)^2=\mathbf{M}_{x_0}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big)^2+\mathbf{M}_{x_0}2\eta_{n,k}^{[\varepsilon]}\sum_{1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}+\mathbf{M}_{x_0}(\eta_{n,k}^{[\varepsilon]})^2=$$

$$=\mathbf{M}_{x_0}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big)^2+\int\limits_{|x_k-x_{k-1}|\leqslant\varepsilon}(x_k-x_{k-1})^2\,P_n(x_{k-1},\,dx_k)\,P_n^{k-1}(x_0,\,dx_k)+$$

$$+\int\limits_{|x_k-x_{k-1}|\leqslant\varepsilon}(x_k-x_{k-1})\,P_n(x_{k-1},\,dx_k)\,\mathbf{M}_{x_0,x_{k-1}}^{k-1}\sum_{1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]},\qquad(6.7)$$

здесь $\mathbf{M}_{x_0,x_{k-1}}^{(k-1)}$ обозначает математическое ожидание при условии, что $\xi_0^{(n)}=x_0$, $\xi_{k-1}^{(n)}=x_{k-1}$, а $P_n^{(k-1)}(x,\,A)$ — переходная вероятность за $k-1$ шагов. Так как

$$\int\limits_{|x_k-x_{k-1}|\leqslant\varepsilon}(x_k-x_{k-1})^2\,P_n(x_{k-1},\,dx_k)\,P_n^{k-1}(x_0,\,dx_{k-1})\leqslant\frac{C}{n},\qquad(6.8)$$

а

$$\Big|\int\limits_{|x_k-x_{k-1}|\leqslant\varepsilon}(x_k-x_{k-1})\,P_n(x_{k-1},\,dx_k)\,P_n^{(k-1)}(x_0,\,dx_1)\,\mathbf{M}_{x_0,x_{k+1}}^{(k-1)}\sum_{j=1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{n}\int P_n^{(k-1)}(x_0,\,dx_{k-1})\,\mathbf{M}_{x_0,x_{k-1}}^{(k-1)}\Big|\sum_{j=1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big|=\frac{C}{n}\,\mathbf{M}_{x_0}\Big|\sum_{j=1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{n}\Big[1+\mathbf{M}_{x_0}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big)^2\Big],\qquad(6.9)$$

то, подставив (6.8) и (6.9) в (6.7) и беря sup по x_0, получим $a_k\leqslant\frac{2C}{n}+$ $+\Big(1+\frac{C}{n}\Big)a_{k-1}$, тем более $a_k+1\leqslant\Big(1+\frac{2C}{n}\Big)(a_{k-1}+1)$. Так как $a_0=0$, то $(a_{k+1}+1)\leqslant\Big(1+\frac{2C}{n}\Big)^k$, откуда

$$a_l\leqslant\Big(1+\frac{2C}{n}\Big)^l-1\leqslant e^{\frac{2lC}{n}}-1.$$

Значит

$$\mathbf{M}_{x_0}\Big(\sum_{j=1}^{l}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\Big)^2\leqslant e^{2C\frac{l}{n}}-1,\qquad(6.10)$$

и, применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\sum_{l=1}^{l}\eta_{n,l}^{[\varepsilon]}\Big|>r\,\Big|\,\xi_0^{(n)}=x_0\Big\}\leqslant\frac{e^{2C\frac{l}{n}}-1}{r^2}.\qquad(6.11)$$

Для дальнейшего нам нужно будет оценить

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{1\leqslant s\leqslant l}\Big|\sum_{i=1}^{s}\eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\Big|>r\Big\}.$$

Для этого рассмотрим величины $\overset{\vee}{\zeta}{}_n^{(i)} = (\eta_{n,i}^{[\varepsilon]},\ z) + \dfrac{C}{n}$, z—произвольный вектор из $R^{(m)}$, $\|z\| = 1$. Имеем

$$\mathbf{M}_{\xi_0^{(n)},\,\xi_1^{(n)},\ldots,\xi_{i-1}^{(n)}}\overset{\vee}{\zeta}{}_n^{(i)} = \frac{C}{n} + \int\limits_{|x-y|<\varepsilon} \{(z,\,y) - (z,\,x)\}\,P_n(x,\,dy) = \frac{C}{n} +$$

$$+ \left(z,\ \int\limits_{|x-y|<\varepsilon} (y-x)\,P_n(x,dy)\right) \geqslant 0.$$

Поэтому и $\mathbf{M}_{\zeta_n^{(1)},\ldots,\zeta_n^{(i-1)}}\zeta_n^{(i)} = 0$, так как $\zeta_n^{(1)},\ \ldots,\ \zeta_n^{(i-1)}$ являются функциями $\xi_0^{(n)},\ \xi_1^{(n)},\ \ldots,\ \xi_{i-1}^{(n)}$. Значит величины $\chi_n^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^{j} \zeta_n^{(i)}$ образуют полумартингал (см. [15], гл. 7), поэтому на основании теоремы 3.2 [15], гл. 7, § 3

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant i\leqslant l} \chi_n^{(i)} > r \,|\, \xi_0^{(n)} = x_0\right\} = \frac{\mathbf{M}_{x_0}|\,\chi_n^{(l)}\,|}{r} \leqslant \frac{\dfrac{l}{n}\,C + \mathbf{M}_{x_0}\left|\sum\limits_{i=1}^{l} \eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right|}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{lC}{nr} + \frac{1}{2r}\left(\mathbf{M}_{x_0}\left|\sum_{i=1}^{l} \eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right|^2 + 1\right) \leqslant \frac{Cl}{n} + \frac{1}{2r} + \frac{e^{\frac{2Cl}{n}} - 1}{2r},$$

а основании (6.10). Аналогично

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{1\leqslant i\leqslant l} \chi_n^{(i)} < -r\right\} \leqslant \frac{Cl}{rn} + \frac{1}{2r} + \frac{e^{\frac{2Cl}{n}} - 1}{2r}.$$

Значит

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant i\leqslant l} |\,\chi_n^{(i)}\,| > r\right\} \leqslant \frac{e^{\frac{2Cl}{n}} + 2C\dfrac{l}{n}}{r},$$

откуда, при $\dfrac{l}{n} \leqslant T$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\leqslant i\leqslant l} \left|\sum_{i=1}^{l} \eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right| > r\right\} \leqslant \frac{2CT + e^{2CT}}{r - mCT}\,m^2 \qquad (6.12)$$

(m — размерность пространства).

Перейдем теперь к оценке вероятности $\mathbf{P}\left\{\left|\sum\limits_{1}^{l} \overline{\eta}_{n,i}^{[\varepsilon]}\right| > r \,\middle|\, \xi_0^{(n)} = x_0\right\}$. Пусть $\mathfrak{B}^{(m)}$ событие, заключающееся в том, что среди величин $\overline{\eta}_{n,i}^{[\varepsilon]}$, $i \leqslant l$ будет ровно m отличных от нуля. Тогда

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}^{(m)}\} = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant l} \mathbf{P}\{|\overline{\eta}_{n,i_1}^{[\varepsilon]}| > \varepsilon,\ \ldots,\ |\overline{\eta}_{n,i_m}^{[\varepsilon]}| > \varepsilon;\ |\overline{\eta}_{n,j}^{[\varepsilon]}| \leqslant \varepsilon,$$

$$j \neq i_1, \ldots, i_m \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\Big\} \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant l} \int\limits_{\substack{|x_{i_1} - x_{i_1 - 1}| > \varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ |x_{i_m} - x_{i_m - 1}| > \varepsilon}} \ldots \int P_n(x_0, dx_1) \times$$

$$\times P_n(x_1, dx_2) \ldots P_n(x_{l-1}, dx_l) \leqslant \frac{l!}{m!\,(l-m)!} \left(\frac{C}{n}\right)^m \leqslant \frac{1}{m!} \left(\frac{lC}{n}\right)^n.$$

Вероятность того, что среди величин $\overline{\eta}_{in,1}^{[\varepsilon]}, \ldots, \overline{\eta}_{in,l}^{[\varepsilon]}$ будет не менее m отличных от нуля не превосходит величины $\sum\limits_m^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{l}{n} C\right)^k$. Обозначим далее через ψ_1 первую отличную от нуля величину $\overline{\eta}_{in,j}^{[\varepsilon]}$, через ψ_2 — вторую, и т. д.

Так как $\lim\limits_{r \to \infty} \sup\limits_n nP_n(x, V_r(x)) = 0$ равномерно на каждом компакте, то

$\lim\limits_{N_1 \to \infty} \mathbf{P}\{|\psi_1| > N_1, \sup\limits_{1 \leqslant s \leqslant l} \Big| \sum\limits_{i=1}^{s} \eta_{in,i}^{[l]} \Big| \leqslant r \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\} = 0$ равномерно по n и по x_0 на каждом компакте. Далее равномерно по n и по x_0 на каждом компакте

$$\lim_{N_2 \to \infty} \mathbf{P}\{|\psi_2| > N_2, \sup_{1 \leqslant s \leqslant l} \Big| \sum_{i=1}^{s} \eta_{in,i}^{[\varepsilon]} \Big| \leqslant r, \ |\psi_1| \leqslant N_1 \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\} = 0,$$

так как, если $\psi_2 = \xi_{i_2}^{(n)} - \xi_{i_2 - 1}^{(n)}$, то при наших предположениях $|\xi_{i_2 - 1}^{(n)}| \leqslant N_1 + r$. Аналогично равномерно по n и по x_0 на каждом компакте

$$\lim_{N_m \to \infty} \mathbf{P}\{|\psi_m| > N_m, \sup_{1 \leqslant s \leqslant l} \Big| \sum_{i=1}^{l} \eta_{in,i}^{[\varepsilon]} \Big| \leqslant r, |\psi_1| \leqslant N_1, \ldots, |\psi_{m-1}| \leqslant N_{m-1} \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\} = 0$$

так как, если $\psi_m = \xi_{i_m}^{(n)} - \xi_{i_m - 1}^{(n)}$, то $|\xi_{i_m - 1}^{(n)}| \leqslant r + N_1 + N_2 + \ldots + N_{m-1}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\Big|\sum \psi_j\Big| > L \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\} \leqslant \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}\left\{\Big|\sum \psi_j\Big| > L, \mathfrak{B}_i \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\} +$$

$$+ \sum_{k=k+1}^{\infty} \mathbf{P}\{\mathfrak{B}_i \mid \xi_0 = x_0\} = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}\left\{\Big|\sum_{i=1}^{i} \psi_j\Big| > L, \mathfrak{B}_i \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\} +$$

$$+ \sum_{k}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\mathfrak{B}_i \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\} \leqslant k\mathbf{P}\left\{\sup_{1 \leqslant s \leqslant l} \Big| \sum_{1}^{s} \eta_{in,j}^{[\varepsilon]} \Big| > r \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left\{\Big|\sum_{j=1}^{i} \psi_j\Big| > L, \sup_{1 \leqslant s \leqslant l} \Big| \sum_{1}^{s} \eta_{in,j}^{[\varepsilon]} \Big| > r \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\mathfrak{B}^{(l)} \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\} \leqslant \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} (CT)^i + km^2 \frac{2CT + e^{2CT}}{r - mCT} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \mathbf{P}\left\{|\psi_j| > N_j, \ |\psi_1| \leqslant N_1, \ldots, |\psi_{j-1}| \leqslant N_{j-1}, \right.$$

$$\left. \sup_{1 \leqslant s \leqslant l} \Big| \sum_{1}^{s} \eta_{in,l}^{[\varepsilon]} \Big| > r \Big| \xi_0^{(n)} = x_0\right\},$$

каковы бы ни были положительные числа $N_1, N_2, \ldots, N_k$, такие что $N_1 + N_2 + \ldots + N_k \leqslant L$. Переходя в последнем неравенстве в правой части к пределу сначала при $N_k \to \infty$, потом при $N_{k-1} \to \infty$ и т. д., потом при $r \to \infty$ и наконец при $k \to \infty$, получим, что равномерно по n и по x_0 на каждом компакте

$$\limsup_{L\to\infty}\limsup_{n} \mathbf{P}\{|\psi_j| > L \mid \xi_0^{(n)} = x_0\} = 0,$$

значит

$$\limsup_{L\to\infty}\limsup_{n} \mathbf{P}\left\{\left|\sum_1^l \overline{\eta}_{n,j}^{[\varepsilon]}\right| > L \,\middle|\, \xi_0^{(n)} = x_0\right\} = 0, \tag{6.13}$$

а так как

$$\mathbf{P}\{|\xi_l^{(n)}| > 2r \mid \xi_0^{(n)} = x_0\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\sum_1^l \eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\right| > r \,\middle|\, \xi_0^{(n)} = x_0\right\} +$$

$$+ \mathbf{P}\left\{\left|\sum_1^l \overline{\eta}_{n,j}^{[\varepsilon]}\right| > r \,\middle|\, \xi_0^{(n)} = x_0\right\},$$

то из (6.11) и (6.13) и получаем утверждение теоремы.

6.6. Замечание. Если мы проследим доказательство теоремы 6.5, то убедимся, что мы доказали более сильное утверждение, именно, что равномерно по x_0 на каждом компакте

$$\lim_{r\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\sup_{1\leqslant l\leqslant nT}|\xi_l^{(n)}| > r \mid \xi_0^{(n)} = x_0\} = 0.$$

Из этого следует, что каковы бы ни были начальные распределения $\xi_0^{(n)}$, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{r\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{|\xi_0^{(n)}| r\} = 0$, будет также $\lim\limits_{r\to\infty}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\sup\limits_{1\leqslant l\leqslant nT}|\xi_l^{(n)}| > r\} = 0$.

§ 7. Предельные теоремы для J_1-непрерывных функционалов

В этом параграфе доказываются на основании результатов § 5 и § 6 предельные теоремы для $\mathbf{J}_1$-непрерывных функционалов для того случая, когда $\xi_0(t)$ — однородный марковский процесс, а $\xi_n(t)$ — либо последовательность однородных марковских процессов, либо последовательность процессов, построенных по последовательности однородных цепей Маркова.

7.1. Теорема. *Пусть для последовательности однородных марковских процессов $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, выполнено условие* Д. I, *а для процесса $\xi_0(t)$—условия* Д. I *и* Д. II (*см.* § 5), *для инфинитезимальных операторов процессов $\xi_n(t)$ выполнены условия сходимости* I *и, кроме того, распределения $\xi_n(0)$ сходятся к распределению $\xi_0(0)$. Тогда для каждого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала F распределения $F(\xi_n(t))$ слабо сходятся к распределению $F(\xi_0(t))$.*

7.2. Теорема. *Пусть $\xi_{n,0}, \xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность однородных цепей Маркова с переходной вероятностью за один*

шаг в n-ой цепи $P_n(x, A)$, такой что для всякой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ интеграл $\int P_n(x, dy) f(y)$ является также непрерывной функцией. Рассмотрим процессы $\xi_n(t)$, определенные равенствами

$$\xi_n(t) = \xi_{n,k}, \quad \frac{k}{n+1} \leqslant t < \frac{k+1}{n+1}; \quad \xi_n(1) = \xi_{n,n}. \tag{7.1}$$

Пусть далее для марковского процесса $\xi_0(t)$ выполнено условие Д, *а для $P_n(x, A)$ и инфинитезимального оператора $I^{(0)}$ процесса $\xi_0(t)$ выполнены условия сходимости* II *и кроме того распределения $\xi_{n,0}$ слабо сходятся к распределению $\xi_0(0)$. Тогда для каждого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала F распределения $F(\xi_n(t))$ слабо сходится к распределению $F(\xi_0(t))$.*

7.3. Теорема. *Пусть для последовательности однородных марковских процессов $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ выполнено условие* Д.I, *а для однородного марковского процесса $\xi_0(t)$ выполнено условие* Д, *причем для каждой функции из $D^{(2)}$ имеем $\sup\limits_n \sup\limits_x |I^{(n)}\varphi(x)| < \infty$ и $I^{(n)}\varphi(x) \to I^{(0)}\varphi(x)$ равномерно на каждом компакте, и кроме того распределения $\xi_n(0)$ слабо сходятся к распределению $\xi_0(0)$. Тогда для каждого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала F распределения $F(\xi_n(t))$ слабо сходятся к распределению $F(\xi_0(t))$.*

7.4. Теорема. *Пусть $\xi_{n,0}, \xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$,— последовательность однородных цепей Маркова с переходной вероятностью за один шаг $P_n(x, A)$, а $\xi_0(t)$ — однородный марковский процесс, для которого выполнено условие* Д. *Если $\xi_n(t)$ определены формулой* (7.1) *и*

1) $\int P_n(x, dy) f(y)$ *непрерывен для всякой непрерывной ограниченной функции $f(x)$;*

2) $\sup\limits_n \sup\limits_x n \left| \int P_n(x, dy)(f(y) - f(x)) \right| < \infty$ *для любой $f \in D^{(2)}$, и равномерно на каждом компакте $n \int P_n(x, dy)(f(y) - f(x)) \to I^{(0)} f(x)$;*

3) *распределения $\xi_{n,0}$ слабо сходятся к распределению $\xi_0(0)$, то для любого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала F распределения $F(\xi_n(t))$ слабо сходятся к распределению $F(\xi_0(t))$.*

Теорема 7.1 следует из теорем 7.3 и 5.3, а теорема 7.2 следует из теорем 7.4 и 5.5. Поэтому мы будем доказывать лишь теоремы 7.3 и 7.4. Доказательство этих теорем будет опираться на две леммы.

7.5. Лемма. *В условиях теоремы* 7.4 *конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$.*

Доказательство. Покажем, что из условий теоремы 7.4 следуют условия 6.5. Во-первых, покажем, что существует такое C, что $\int\limits_{|x-y|<\varepsilon} (x-y)^2 P_n(x, dy) \leqslant \frac{C}{n}$. Из условия 2) п. 7.4 следует, что существует такое C_1, что

$$\sup_n \sup_x n \left| \int P_n(x, dy)(\cos x^i - \cos y^i) \right| \leqslant C_1,$$

$$\sup_n \sup_x n \left| \int P_n(x, dy)(\sin x^i - \sin y^i) \right| \leqslant C_1. \tag{7.2}$$

Поэтому $\sup\limits_n \sup\limits_x n \left| \int P_n(x, dy)(\cos^2 x^i + \sin^2 x^i - \cos x^i \cos y^i - \sin x^i \sin y^i) \right| \leqslant$

$$\leqslant \sup_n \sup_x |\cos x^i| \, n \left| \int P_n(x, dy)(\cos x^i - \cos y^i) \right| +$$

$$+ \sup_n \sup_x |\sin x^i| \left| \int P_n(x, dy)(\sin x^i - \sin y^i) \right| \leqslant 2C_1$$

или

$$n \int P_n(x, dy)(1 - \cos(x^i - y^i)) \leqslant 2C_1; \quad n \int P_n(x, dy) \, 2 \sin^2 \left(\frac{x^i - y^i}{2} \right) \leqslant 2C_1.$$

Так как $\sin^2 x \geqslant \frac{4}{\pi^2} x^2$ при $|x| < \frac{\pi}{2}$, то

$$\int\limits_{|x-y| < \frac{\pi}{2}} \sum (x^i - y^i)^2 P_n(x, dy) \leqslant \frac{mC_1\pi^2}{n} \tag{7.3}$$

(m — размерность пространства $R^{(m)}$).

Покажем теперь, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\sup_n \sup_x n P_n(x, V_\varepsilon(x)) < \infty. \tag{7.4}$$

Предположим, что (7.4) не выполняется. Тогда найдется такая последовательность точек x_{n_k}, что $\lim\limits_{k \to \infty} n_k P_{n_k}(x_{n_k}, V_\varepsilon(x_{n_k})) = \infty$. Покажем, что $x_{n_k} \to \infty$. Для этого нужно показать, что для всякого компакта K

$$\sup_n \sup_{x \in K} n P_n(x, V_\varepsilon(x)) < \infty. \tag{7.5}$$

Пусть K — куб с ребром $2N$. Обозначим $\psi_N(x)$ функцию из $D^{(2)}$, равную на K единице, $\psi_N(x) = 0$ при $|x| \geqslant N + 1$ и $0 \leqslant \psi_N(x) < 1$ при $N < |x| < N + 1$. Тогда функция

$$g_N(x, x_0) = \psi_N(x) \sum_{i=1}^{m} \cos \frac{x^i - x_0^i}{2N} \pi$$

имеет абсолютный максимум при $x^i = x_0^i$ в том случае, если $|x_0| \leqslant N$. Используя то обстоятельство, что

$$\left| n \int P_n(x, dy)(g_N(y, x_0) - g_N(x, x_0)) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} \left(\int P_n(x, dy) \left[\left(\cos \frac{x^i}{2N} \pi - \cos \frac{y^i}{2N} \pi \right) \cos \frac{x_0^i}{2N} \pi + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \left(\sin \frac{x^i}{2N} \pi - \sin \frac{y^i}{2N} \pi \right) \sin \frac{x_i^0}{2N} \pi \right] \right) \right|$$

и, следовательно, равномерно ограничено по x при $|x_0| \leqslant N$, а также то, что

$$P_n(x_0, V_\varepsilon(x_0)) \leqslant \frac{n \left| \int P_n(x, dy) \, [g_N(y, x_0) - g_N(x_0, x_0)] \right|}{\inf\limits_{|x - x_0| > \varepsilon} (g_N(x_0, x_0) - g_N(x, x_0))};$$

получим (7.5). Значит точки x_{n_k} могут только стремиться к ∞. Покажем, что и этого не может быть.

Пусть $\varphi_k(x)$ — неотрицательные функции из $D^{(2)}$, имеющие абсолютный максимум, равный 1, при $x = x_{n_k}$ и равные нулю при $|x - x_{n_k}| \geqslant \varepsilon$. Тогда

$$I^{(n_k)}\varphi_k(x_{n_k}) = n_k \int (\varphi_k(y) - \varphi_k(x_{n_k}))P_{n_k}(x_{n_k}, dy) \leqslant -n_k P_{n_k}(x_{n_k}, V_\varepsilon(x_{n_k})).$$

Обозначим $\gamma_i(x)$ неотрицательную функцию из $D^{(2)}$, равную единице при $|x| \leqslant |x_{n_i}|$ и равную нулю при $|x| \geqslant |x_{n_i}| + \varepsilon$; через C_i обозначим постоянную, такую что $|I^{(n)}\gamma_i(x)| \leqslant C_i$. Пусть r_i выбрано так, что $n_i P(x_{n_i}, V_{r_i}(x_{n_i})) \leqslant 1$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что x_{ni} образуют монотонную последовательность, причем $|x_{n_{i-1}} - x_{n_i}| \geqslant r_i + \varepsilon$ и кроме того

$$C_{i-1} \leqslant \frac{n_i}{2} P_{n_i}(x_{n_i}, V_\varepsilon(x_{n_i})).$$

Тогда функция $\varphi = \sum_1^\infty \varphi_i(x)$ является функцией из $D^{(2)}$, и значит существует такое C, что $|I^{(n)}\varphi| \leqslant C$. Рассмотрим

$$I^{(n)}\varphi(x_{n_i}) = n_i \sum \int (\varphi_k(x) - \varphi_k(x_{n_i}))\, P_{n_i}(x_{n_i}, dx) =$$

$$= n_i \sum_{k<i} \int [\varphi_k(x) - \varphi_k(x_{n_i})]\, P_{n_i}(x_{n_i}, dx) + n_i \int (\varphi_i(x) - \varphi_i(x_{n_i}))P_{n_i}(x, dy) +$$

$$+ n_i \sum_{k>i} \int (\varphi_k(x) - \varphi_k(x_{n_i}))\, P_{n_i}(x_{n_i}, dx).$$

Имеем

$$n_i \sum_{k<i} \int (\varphi_k(x) - \varphi_k(x_{n_i}))P_{n_i}(x_{n_i}, dx) = n_i \sum_{k<i} \int \varphi_k(x) P_{n_i}(x_{n_i}, dx) \leqslant$$

$$\leqslant n_i \int \chi_{i-1}(x) P_{n_i}(x_{n_i}, dx) = n_i \int (\chi_{i-1}(x) - \chi_{i-1}(x_{n_i}))P_{n_i}(x_{n_i}, dx) \leqslant$$

$$\leqslant C_{i-1} \leqslant \frac{1}{2} n_i P_{n_i}(x_{n_i}, V_\varepsilon(x_{n_i})),$$

а

$$n_i \sum_{k>i} \int P_{n_i}(x_{n_i}, dx)(\varphi_k(x) - \varphi_k(x_{n_i})) \leqslant n_i P_{n_i}(x_{n_i}, V_{r_i}(x_{n_i})) \leqslant 1.$$

Таким образом

$$I^{(n)}\varphi_i(x) \leqslant -\frac{1}{2} n_i P_{n_i}(x_{n_i}, V_\varepsilon(x_{n_i})) + 1 \to -\infty$$

при $n_i \to \infty$. Это же противоречит условию 2) теоремы 7.4. Значит равенство (7.4) действительно имеет место.

Покажем теперь, что существует постоянная C', для которой

$$\Big|\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}(x^i-y^i)\,P_n(x,\,dy)\Big|\leqslant\frac{C'}{n}. \tag{7.6}$$

Для этого воспользуемся соотношениями (7.2). Из них следует, что

$$\sup_n\sup_x n\Big|\int P_n(x,\,dy)\sin(x^i-y^i)\Big| = \sup_n\sup_x n\Big|\int P_n(x,\,dy)(\sin x^i\cos y^i -$$

$$-\sin y^i\cos x^i)\Big|\leqslant\sup_n\sup_x n\Big|\int P_n(x,\,dy)(\cos y^i-\cos x^i)\Big| +$$

$$+\sup_n\sup_x n\Big|\int P_n(x,\,dy)(\sin x^i-\sin y^i)\Big|\leqslant 2C_1.$$

Далее

$$\Big|n\int\limits_{|x-y|<\frac{\pi}{2}}P_n(x,\,dy)(x^i-y^i)\Big|\leqslant\Big|n\int\limits_{|x-y|<\frac{\pi}{2}}P_n(x,dy)(x^i-y^i-\sin(x^i-y^i))\Big|+$$

$$+n\Big|\int\limits_{|x-y|<\frac{\pi}{2}}P_n(x,\,dy)\sin(x^i-y^i)\Big|\leqslant n\int\limits_{|x-y|<\frac{\pi}{2}}P_n(x,\,dy)\frac{|x^i-y^i|^3}{3!}+$$

$$+2C_1+nP_n(x,V_{\frac{\pi}{2}}(x))\leqslant\frac{\pi^3}{2\cdot 3!}C_1+2C_1+\sup_n\sup_x nP_n(x,V_{\frac{\pi}{2}}(x)).$$

Правая часть есть величина постоянная, ее и можно принять за C'. Этим установлена справедливость (7.6).

Остается показать, что для каждого компакта K

$$\lim_{r\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in K}nP_n(x,V_r(x))=0. \tag{7.7}$$

Для этой цели рассмотрим функцию $\varphi(x)$ из $D^{(2)}$, для которой $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, $\varphi(x)=1$ при $x\in K$, и $\varphi(x)=0$ при $x\in V_r(x_0)$, $x_0\in K$ (r выбрано настолько большим, что $V_r(x_0)\cap K$ пусто при $x_0\in K$). Тогда при $x\in K$

$$-I^{(n)}\varphi(x)=n\int P_n(x,\,dy)(1-\varphi(x))\geqslant P_n(x,V_r(x)),$$

а так как $I^{(n)}\varphi(x)$ сходится к $I^{(0)}\varphi(x)$ равномерно на K, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in K}nP_n(x,V_r(x))\leqslant|I^{(0)}\varphi(x)|.$$

Как следует из условий теоремы 7.4 и (5.1), можно для каждого K подобрать такое r и такую функцию $\varphi_r(x)$, чтобы $|I^{(0)}\varphi_r(x)|<\varepsilon$ для x из K. Отсюда и следует (7.7). Доказательство леммы теперь непосредственно вытекает из теоремы 6.3.

7.6. Замечание. В процессе доказательства леммы 7.5 мы установили, что из условий теоремы 7.4 вытекают условия теоремы 6.5. Так как распределение $\xi_{n,0}$ сходится к распределению $\xi_0(0)$ (по условию 3) тео-

ремы 7.4), то

$$\lim_{r\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{|\xi_{n,t}|>r\}=0,$$

а значит на основании 6.6 мы можем заключить, что

$$\lim_{r\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\Big\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_{n,t}|>r\Big\}=0.$$

7.7. Лемма. *В условиях теоремы 7.3 конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi_0(t)$ для всех двоично рациональных t.*

Доказательство. Покажем сначала, что при фиксированных n и $\varepsilon>0$ $P_t^{(n)}(x, V_\varepsilon(x))$ стремится к нулю при $t\to 0$ равномерно на каждом компакте. Пусть $\widetilde{\varphi a}(x)$ — неотрицательная функция из $D^{(2)}$, $\varphi_a(x)\leqslant 1$, равная единице при $|x|\leqslant a$ и равная нулю при $|x|\geqslant 2a$. Обозначим $x^1, x^2, \ldots, x^m$ координаты точки x, а через $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^m$ — координаты точки x_0. Положим

$$\psi_a(x, x_0)=\varphi_a(x)+\sum_{i=1}^{m}\cos\left(\frac{x^i-x_0^i}{a}\right). \tag{7.8}$$

Функция $\psi_a(x, x_0)$ при $x=x_0$ принимает максимальное значение, равное $m+1$, если $|x_0|\leqslant a$. При $|x_0|\leqslant a$ имеем

$$\psi_a(x_0, x_0)-\psi_a(x, x_0)=m+1-\psi_a(x_0, x)\geqslant\sum_{i=1}^{m}\left(1-\cos\left(\frac{x^i-x_0^i}{a}\right)\right)\geqslant\frac{2\varepsilon^2}{\pi^2a^2},$$

если $\Sigma(x^i-x_0^i)^2\geqslant\varepsilon$, $\frac{\varepsilon}{a}<\frac{\pi}{2}$. Кроме того $\psi_a(x_0, x_0)-\psi_a(x, x_0)\geqslant 0$ для всякого x и наконец, как показывает (7.8),

$$\psi_a(x, x_0)=\widetilde{\varphi a}(x)+\sum_{i=1}^{m}\left(\cos\frac{x^i}{a}\cos\frac{x_0^i}{a}+\sin\frac{x^i}{a}\sin\frac{x_0^i}{a}\right),$$

т. е. $\psi_a(x, x_0)$ есть линейная комбинация $2m+1$ функций из $D^{(2)}$ с ограниченными (по x_0) коэффициентами. Поэтому существует постоянная C, такая что

$$\left|\frac{1}{t}(\psi_a(x, x_0)-\int P^{(n)}(t, x_0, dy)\psi_a(y, x_0))\right|\leqslant C,$$

а значит $\left|\int P^{(n)}(t, x_0, dy)(\psi_a(y, x_0)-\psi_a(x, x_0))\right|\leqslant Ct$, или при $|x_0|<a$

$$P^{(n)}(t, x_0, V_\varepsilon(x_0))\leqslant\int\limits_{V_\varepsilon(x_0)}P^{(n)}(t, x_0, dy)\frac{(\psi_a(x_0, x_0)-\psi_a(y, x_0))}{2\varepsilon^2}\pi^2a^2\leqslant\frac{\pi^2a^2}{2\varepsilon^2}Ct.$$

Это и доказывает высказанное в начале доказательства утверждение. Пусть C_n таковы, что при $x_0\leqslant n$ будет $P^{(n)}(t, x_0, V_{\frac{1}{n}}(x_0))\leqslant C_nt$. Возьмем $t_n<\frac{1}{2^n}$ таким, чтобы $\frac{C_n}{2^n}t_n\to 0$ и $t_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Покажем, что для всякой функции φ из $D^{(2)}$ величины $\frac{1}{t_n}\int P^{(n)}(t_n, x, dy)(\varphi(y)-\varphi(x))$ будут

ограничены одной постоянной и равномерно на каждом компакте

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int P^{(n)}(t_n, x, dy)(\varphi(y)-\varphi(x)) = I^{(0)}\varphi(x). \tag{7.9}$$

Действительно,

$$\frac{1}{t_n}\int P^{(n)}(t_n, x, dy)(\varphi(y)-\varphi(x)) = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\frac{d}{d\tau}\left(\int P^{(n)}(\tau, x, dy)\varphi(y)\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\int P^{(n)}(t, x, dy) I^{(n)}\varphi(y)\,d\tau. \tag{7.10}$$

Так как $|I^{(n)}\varphi|$ все ограничены одной и той же постоянной, то из (7.10) следует первая половина нашего утверждения. Для доказательства (7.9) перепишем (7.10) в виде:

$$\frac{1}{t_n}\int P^{(n)}(t_n, x, dy)(\varphi(y)-\varphi(x)) = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\int_{|x-y|\le\frac{1}{n}} P^{(n)}(\tau, x, dy)\,[I^{(n)}\varphi(y) - I^{(0)}\varphi(y)]\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\int_{|x-y|\le\frac{1}{n}} P^{(n)}(\tau, x, dy)\,(I^{(0)}\varphi(y) - I^{(0)}\varphi(x))\,d\tau +$$

$$+\frac{I^{(0)}\varphi(x)}{t_n}\int_0^{t_n} P^{(n)}(\tau, x, V_{\frac{1}{n}}(x))\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{t_n}\int_{|x-y|\le\frac{1}{n}} P^{(n)}(\tau, x, dy)\, I^{(n)}\varphi(y)\,d\tau - I^{(n)}\varphi(x).$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства стремится к нулю равномерно на каждом компакте, так как $I^{(n)}\varphi(x)$ стремится к $I^{(0)}\varphi(x)$ равномерно на каждом компакте; второе слагаемое стремится к нулю равномерно на каждом компакте, так как $I^{(0)}\varphi(x)$ равномерно непрерывно на каждом компакте; наконец третье и четвертое стремятся к нулю равномерно на каждом компакте, так как $I^{(0)}\varphi$ и $I^{(n)}\varphi$ являются величинами ограниченными, а

$$\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} P^{(n)}(\tau, x, V_{\frac{1}{n}}(x))\,d\tau \le \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} C_n\tau\,d\tau \le \frac{C_n t_n^2}{2}\to 0$$

ввиду выбора t_n. Равенство (7.9) установлено. Значит, если рассмотреть последовательность цепей Маркова $\xi_k^{(2^{t_n})} = \xi^{(n)}\left(\frac{k}{2^{t_n}}\right)$, то для нее будут выполнены условия теоремы 7.4. Доказательство 7.7 немедленно вытекает из 7.5.

7.8. Замечание. Возьмем произвольный процесс $\xi_n(t)$ и построим последовательность цепей Маркова $\eta_{m,l} = \xi_n\left(\frac{l}{m}\right)$. Обозначим переходную вероятность за один шаг в этой цепи $\bar{P}_m(x, A)$. Легко проверить, что для $\eta_{m,l}$ выполняются условия теоремы 7.4 с предельным процессом $\xi_n(t)$ (это устанавливается точно таким образом, как в доказательстве 7.7 доказывалось выполнение условий 7.4 для последовательности цепей Маркова $\xi_k^{(2^{l_n})}$). Поэтому на основании 7.6 мы можем заключить, что

$$\lim_{r\to\infty} \sup_q \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant l\leqslant qT} |\eta_{q,l}| > r\} = 0,$$

или, что то же самое

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{\substack{t\in R_t \\ 0\leqslant t\leqslant T}} |\xi_n(t)| > r\} = 0,$$

где R_t обозначает совокупность всех рациональных чисел.

Дальнейшее доказательство теорем 7.3 и 7.4 совершенно аналогично. Приведем первое из них.

Доказательство теоремы 7.3. Для упрощения записи мы будем предполагать, что пространство $R^{(m)}$, в котором происходит процесс, двумерно, будем обозначать его $R^{(2)}$, а координаты точки x через x^1 и x^2. Из условий теоремы следует, что для каждой φ из $D^{(2)}$ существует такая постоянная C_φ, для которой $|I^{(n)}\varphi| \leqslant C_\varphi$; $n = 0, 1, \ldots$ Положим $\varphi_{11}(x) = \sin \operatorname{arc\,tg} x^1$, $\varphi_{12}(x) = \cos \operatorname{arc\,tg} x^1$, $\varphi_{21}(x) = \sin \operatorname{arc\,tg} x^2$, $\varphi_{22}(x) = \cos \operatorname{arc\,tg} x^2$. Пусть $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Определим функцию $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, x)$ равенством:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, x) = \cos\alpha_1\varphi_{11}(x) + \sin\alpha_1\varphi_{21}(x) + \cos\alpha_2\varphi_{21}(x) + \sin\alpha_2\varphi_{22}(x).$$

Для $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, x)$ справедливо неравенство $I^{(n)}\varphi(\alpha_1, \alpha_2, x) \leqslant K$, где $K = C_{\varphi_{11}} + C_{\varphi_{12}} + C_{\varphi_{21}} + C_{\varphi_{22}}$. Тогда

$$\left|\int P^{(n)}(t, x, dy)(\varphi(\alpha_1, \alpha_2, y) - \varphi(\alpha_1, \alpha_2, x))\right| =$$

$$= \int_0^t \left(\int P^{(n)}(\tau, x, dy) I^{(n)}\varphi(\alpha_1, \alpha_2, y)\right) d\tau \leqslant Kt.$$

Пусть $\bar{x}$ — произвольная точка $R^{(2)}$ с координатами $\bar{x}^1$ и $\bar{x}^2$. Выберем $\bar{\alpha}_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \bar{x}^1$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \bar{x}^2$. Обозначим $\tilde{V}_\delta(x)$ множество тех x, для которых или $|\operatorname{arc\,tg} \bar{x}^1 - \operatorname{arc\,tg} x^1| \geqslant \delta$ или $|\operatorname{arc\,tg} \bar{x}^2 - \operatorname{arc\,tg} x^2| \geqslant \delta$. Тогда для $x \in \tilde{V}_\delta(\bar{x})$

$$\varphi(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{x}) - \varphi(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\delta^2.$$

Так как $\varphi(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{x}) - \varphi(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, x) \geqslant 0$ для всех x, то для всех n

$$P^{(n)}(t, \bar{x}, \tilde{V}_\delta(\bar{x})) \leqslant \frac{\pi}{2\delta^2} \int [\varphi(\alpha_1, \bar{\alpha}_2, \bar{x}) - \varphi(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, x)] P^{(n)}(t, \bar{x}, dx) \leqslant \frac{\pi^2 Kt}{2\delta^2}. \quad (7.11)$$

Введем в $R^{(2)}$ новую метрику, полагая

$$\tilde{\rho}(x, y) = \max\left[\left|\operatorname{arc\,tg} x^1 - \operatorname{arc\,tg} y^1\right|; \left|\operatorname{arc\,tg} x^2 - \operatorname{arc\,tg} y^2\right|\right]. \quad (7.12)$$

Пусть $\tilde{X}$ — пространство, полученное из $R^{(2)}$ с метрикой $\tilde{\rho}$ присоединением элементов вида $(x^1, \pm\infty), (\pm\infty, x^2), (\pm\infty, \pm\infty), (\pm\infty, \mp\infty)$, причем метрика $\tilde{\rho}$ определяется и на этих элементах формулой (7.12), если считать $\operatorname{arc\,tg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$. Тогда $\tilde{X}$ есть полное метрическое пространство, изометричное квадрату со стороной, равной π. Рассмотрим в $\tilde{X}$ процессы $\tilde{\xi}_n(t)$, такие, что распределение $\tilde{\xi}_n(0)$ совпадает с распределением $\xi_n(0)$ (если рассматривать $R^{(2)}$ как подмножество $\tilde{X}$), а переходные вероятности этого процесса определяются равенствами

$$\tilde{P}^{(n)}(t, x, A) = \begin{cases} P(t, x, A \cap R^{(2)}), & x \in R^{(2)} \\ 0, & x \in \tilde{X} \setminus (R^{(2)} \cup A) \\ 1, & x \in (\tilde{X} \setminus R^{(2)}) \cap A. \end{cases} \quad (7.13)$$

На основании теоремы 2.3 можно считать, что выборочные функции процессов $\tilde{\xi}_n(t)$ с вероятностью 1 принадлежат $K_{\tilde{X}}$. Так как $\tilde{\xi}_n(0) \in R^{(2)}$ с вероятностью 1, то на основании 7.8 можем заключить, что, каково бы ни было $T > 0$,

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in R_1 \cap [0, T]} \tilde{\rho}(\tilde{\xi}_n(t), 0) > \frac{\pi}{2} - \delta\right\} = 0, \quad (7.14)$$

а из того, что выборочные функции $\tilde{\xi}_n(t) \in K_X$ с вероятностью 1 и (7.14), вытекает

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0, T]} \tilde{\rho}(\tilde{\xi}_n(t), 0) > \frac{\pi}{2} - \delta\right\} = 0. \quad (7.15)$$

Из (7.13), (7.15) и того, что распределения $\xi_n(t)$ и $\tilde{\xi}_n(t)$ совпадают, вытекает, что конечномерные распределения $\xi_n(t)$ и $\tilde{\xi}_n(t)$ совпадают, значит $\xi_n(t)$ также будет с вероятностью 1 принадлежать K_X. А так как всякая функция $x(t)$, принадлежащая $K_{\tilde{X}}$ и удовлетворяющая условию $\sup_t \tilde{\rho}(x(t), 0) < \frac{\pi}{2} - \delta$, принадлежит и $K_{R^{(2)}}$, то $\xi_n(t) \in K_{R^{(2)}}$ с вероятностью 1. Так как у последовательности процессов $\tilde{\xi}_n(t)$ конечномерные распределения сходятся к конечномерным распределениям процесса $\tilde{\xi}_0(t)$ для всюду плотного множества значений t, и кроме того выполняется (7.11), то выполняются условия теоремы 3.2, и для всякого функционала $\tilde{F}$, непрерывного в топологии $\mathbf{J}_1$ на $K_{\tilde{X}}$, распределения $\tilde{F}(\tilde{\xi}_n(t))$ сходятся к распределению $\tilde{F}(\tilde{\xi}_0(t))$. На основании 3.2 и 3.3 работы [1] для каждого функционала F, непрерывного почти всюду в топологии $\mathbf{J}_1$ на $K_{\tilde{X}}$ по мере, соответствующей процессу $\tilde{\xi}_0(t)$, распределения $F(\tilde{\xi}_n(t))$ будут сходиться к распределению

$F(\widetilde{\xi}_0(t))$. Заметим теперь, что если последовательность функций сходится в топологии $\mathbf{J}_1$ на $K_{R^{(2)}}$, то она будет сходиться в топологии $\mathbf{J}_1$ на $K_{\widetilde{X}}$. Поэтому из (7.15) следует, что всякий функционал F, непрерывный в топологии $\mathbf{J}_1$ на $K_{R^{(2)}}$, будет почти всюду непрерывным в топологии $\mathbf{J}_1$ на $K_{\widetilde{X}}$ относительно меры, соответствующей любому из процессов $\widetilde{\xi}_n(t)$. Значит для любого функционала F, непрерывного в топологии $\mathbf{J}_1$ на $K_{R^{(2)}}$, распределения $F(\widetilde{\xi}_n(t))$ будут сходиться к распределению $F(\widetilde{\xi}_0(t))$, а из совпадения распределений $F(\widetilde{\xi}_n(t))$ и $F(\xi_n(t))$ следует, что и распределения $F(\xi_n(t))$ будут сходиться к распределению $F(\xi_0(t))$. Теорема доказана.

§ 8. Одна предельная теорема для диффузионных процессов

Как замечено в [14], аппарат полугрупп можно применить и для неоднородных процессов Маркова. В этом параграфе мы, используя аппарат полугрупп и результаты § 5 и § 7, выведем одну предельную теорему о сходимости последовательности цепей Маркова к неоднородному марковскому процессу диффузионного типа.

Пусть переходная марковская функция $P(t, x, s, A)$ процесса $\xi(t)$, определенного в $R^{(m)}$, обладает следующими свойствами:

1) $P(t, x, s, A)$ при фиксированном A измерима по совокупности переменных $x \in R^{(m)}$, $0 \leqslant t < s < \infty$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ равномерно по x

$$\lim_{s-t \downarrow 0} P(t, x, s, V_\varepsilon(x)) = 0; \tag{8.1}$$

3) для всякой ограниченной непрерывной по совокупности переменных $x \in R^{(m)}$, $t \in [0, \infty)$, функции $f(t, x)$

$$\int P(t, x, t+\tau, dy) f(t+\tau, y)$$

является также при всяком фиксированном $\tau > 0$ непрерывной по совокупности переменных функцией.

Рассмотрим полугруппу U_τ, определенную на пространстве всех функций $f(t, x)$, $t \in [0, \infty)$, $x \in R^{(m)}$, ограниченных и непрерывных по совокупности переменных, формулой

$$U_\tau f(t, x) = \int f(t+\tau, y) P(t, x, t+\tau, dy). \tag{8.2}$$

Выполнение полугруппового свойства следует из уравнения Колмогорова — Чепмена:

$$U_s(U_\tau f(t, x)) = \int P(t, x, t+s)\, dy \int P(t+s, y, t+s+\tau, dz) f(t+s+\tau, z) =$$

$$= \int f(t+\tau+s) P(t, x, t+s+\tau, dz) = U_{s+\tau} f(t, x).$$

Из 2) следует, что полугруппа является сильно непрерывной.

Легко видеть, что эта полугруппа является полугруппой, соответствующей однородному марковскому процессу в $[0, \infty] \times R^{(m)}$ (имеется в виду топологическое произведение указанных пространств). Переходные вероят-

ности этого процесса определяются следующим образом: пусть $\overline{A}$ некоторое множество из $[0, \infty) \times R^{(m)}$, тогда условная вероятность попасть из точки (t, x) во множество $\overline{A}$ за время τ равна

$$\overline{P}_\tau((t, x), A) = P(t, x, t+\tau, (\overline{A} \cap E_{t+\tau})_x), \tag{8.3}$$

где E_s обозначает множество пар (t, x), для которых $t = s$, а $\overline{B}_x$ обозначает множество тех x, для которых существует такое t, что $(t, x) \in \overline{B}$.

Таким образом с каждым неоднородным процессом связан однородный процесс в пространстве на единицу большей размерности. Каждый функционал от неоднородного процесса можно рассматривать как некоторый функционал от соответствующего однородного процесса (функционал, зависящий только от второй координаты пары (t, x)). При этом $\mathbf{J}_1$-непрерывные функционалы от неоднородных процессов можно рассматривать как $\mathbf{J}_1$-непрерывные функционалы от соответствующего однородного процесса. На этом основывается возможность применять для неоднородных процессов результаты, уже полученные ранее для однородных. Автоматическое перенесение результатов приводит, правда, к условиям, не выражающимся в случае цепей Маркова через переходные вероятности за один шаг. Чтобы получить такие условия, нужно наложить на переходные вероятности дополнительные условия. Более простой и естественный вид эти условия имеют в том случае, когда предельный процесс является диффузионным. Этот случай мы и рассмотрим в этом параграфе. Пусть выполняется

8. 1. Условие Д′ Инфинитезимальный оператор $\overline{I}$ полугруппы (8. 2) удовлетворяет условию Д′, если

1) I определен для каждой дважды непрерывно дифференцируемой по x и дифференцируемой по t функции $\varphi(t,x)$, причем и сама функция и все указанные ее производные равномерно непрерывны;

2) на указанных в 1) функциях оператор $\overline{I}$ имеет вид:

$$\overline{I}\varphi(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) + \frac{1}{2}\sum b_{ij}(t, x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \sum a_i(t, x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}; \tag{8.4}$$

3) для всякой функции, указанной в 1), $R_\lambda(\overline{I})\varphi(t, x)$ ($R_\lambda(\overline{I})$ — резольвента оператора $\overline{I}$) будет также обладать свойствами, перечисленными в пункте 1) настоящего условия.

Методами [20] можно показать, что условие 3) есть следствие достаточной гладкости коэффициентов $b_{ij}(t, x)$ и $a_i(t, x)$.

8.2. Замечание. Пусть $\xi_n(t)$ — последовательность случайных процессов с переходной марковской функцией $P^{(n)}(t, x, s, A)$, а $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $\eta_{n,k} = \xi_n(k\Delta_n)$, а $\overline{\eta}_{n,k}$ — случайная величина в $[0, \infty) \times R^{(m)}$, такая что $\overline{\eta}_{n,k} = (k\Delta_n, \eta_{n,k})$. Величины $\overline{\eta}_{n,k}$ образуют цепь Маркова с переходной вероятностью за один шаг $\overline{P}_n((t, x), \overline{A}) = P^{(n)}(t, x, t+\Delta_n, (\overline{A} \cap E_{t+\Delta_n})_x)$, где $(\overline{A} \cap E_{t+\Delta_n})_x$ обозначает множество тех x, для которых $(t+\Delta_n, x) \in \overline{A}$. Положим

$$\overline{I}^{(n)}\varphi(t, x) = \frac{1}{\Delta_n}\left(\int \varphi(t+\Delta_n, y)\, P^{(n)}(t, x, t+\Delta_n, dy) - \varphi(t, x)\right). \tag{8.5}$$

Пусть для всякой функции, удовлетворяющей условиям пункта 1) 8.1, $\overline{I}^{(n)}\varphi(t, x) \to \overline{I}\varphi(t, x)$ равномерно по t и x на каждом компакте и $|\overline{I}^{(n)}\varphi|$ ограничены все одной постоянной, а $\overline{I}$ задается равенством (8.4). Обозначим $\eta_n(t)$ процесс, определяемый соотношениями $\eta_n(t) = \eta_{n,k}$ при $k\Delta_n \leqslant t < (k+1)\Delta_n$, а $\xi(t)$ процесс, удовлетворяющий условию Д′, с инфинитезимальным оператором $\overline{I}$. Тогда, если распределения $\xi_n(0)$ сходятся к распределению $\xi(0)$, то для любого $\mathbf{J}_1$-непрерывного функционала F, распределения $F(\eta_n(t))$ сходятся к распределению $F(\xi(t))$. В частности, конечномерные распределения $\eta_n(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$. Мы используем замечание 8.2 для доказательства следующей теоремы.

8.3. Теорема. *Пусть* $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}$ *— последовательность цепей Маркова с переходными вероятностями* $P^{(n)}(i, x, j, A) = \mathbf{P}\{\xi_j^{(n)} \in A \mid \xi_i^{(n)} = x\}$, *переходные вероятности за один шаг будем обозначать* $P_k^{(n)}(x, A) = P^{(n)}(k-1, x, k, A)$. *Пусть далее* $\xi(t)$ *— процесс, удовлетворяющий условию* Д′. *Обозначим*

$$b_{n,k}^{i,j}(x, \varepsilon) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x^i - y^i)(x^j - y^j) P_k^{(n)}(x, dy), \tag{8.6}$$

$$a_{n,k}^{i}(x, \varepsilon) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (y^i - x^i) P_k^{(n)}(x, dy), \tag{8.7}$$

$$\lambda_{n,k}(x, \varepsilon) = P_k^{(n)}(x, V_\varepsilon(x)). \tag{8.8}$$

Предположим, что существуют точки $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} < 1$ *и последовательность* $\Delta_n \to 0$ *такие, что выполняются следующие условия:*

а) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* t

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta_n} \sum_{t \leqslant t_k^{(n)} < t+\Delta_n} \sup_{x\in R^{(m)}} \lambda_{n,k}(x, \varepsilon) = 0;$$

б) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* t *и* x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta_n} \sum_{t \leqslant t_k^{(n)} < t+\Delta_n} a_{n,k}^{i}(x, \varepsilon) = a_i(t, x);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta_n} \sum_{t \leqslant t_k^{(n)} < t+\Delta_n} b_{n,k}^{i,j}(x, \varepsilon) = b_{ij}(t, x);$$

в) *существует такое* K, *что*

$$\frac{1}{\Delta_n} \sum_{t \leqslant t_k^{(n)} < t+\Delta_n} \sup_{|x'-x''|<h} (|b_{n,k}^{i,j}(x', \varepsilon) - b_{n,k}^{i,j}(x'', \varepsilon)| + |a_{n,k}^{i}(x', \varepsilon) - a_{n,k}^{i}(x'', \varepsilon)|) \leqslant Kh;$$

г) *существует постоянная* C, *такая что*

$$\sum_{t<t_k^{(n)}\leqslant t+\tau} \sup_{x\in R^{(m)}} (|b_{n,k}^{i,j}(x,\varepsilon)|+|a_{n,k}^{i}(x,\varepsilon)|)\leqslant C\tau;$$

д) *распределение* $\xi_0^{(n)}$ *сходится к распределению* $\xi(0)$. *Тогда, если процесс* $\xi_n(t)$ *определяется соотношениями* $\xi_n(t)=\xi_k^{(n)}, t_k^{(n)}\leqslant t<t_{k+1}^{(n)}$, *то для каждого* $\mathbf{J}_1$*-непрерывного функционала* F *распределения* $F(\xi_n(t))$ *сходятся к распределению* $F(\xi(t))$.

Доказательство. Оценим $\sup\limits_x \sup\limits_{|t_i-t_j|<h} P^{(n)}(i,x,j,V_\varepsilon(x))$. Для этого рассмотрим функцию $\varphi_\varepsilon(x,y)$, дважды непрерывно дифференцируемую по y при каждом фиксированном x, причем $\varphi_\varepsilon(x,x)>\varphi_\varepsilon(x,y)$ при $x\neq y$, и $\varphi_\varepsilon(x,x)-\varphi_\varepsilon(x,y)\geqslant 1$ при $|x-y|\geqslant\varepsilon$. Тогда

$$P^{(n)}(i,x,j,V_\varepsilon(x))\leqslant\int P^{(n)}(i,x,j,dy)[\varphi_\varepsilon(x,x)-\varphi_\varepsilon(x,y)]=$$

$$=\sum_{r=i}^{j-1}\int P^{(n)}(i,x,r,dz)\int P_{r+1}^{(n)}(z,dy)(\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{j-1}\int P^{(n)}(i,x,r,dz)\left|\int P_{r+1}^{(n)}(z,dy)(\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y))\right|.$$

Оценим

$$\int P_{r+1}^{(n)}(z,dy)(\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y))\leqslant\int\limits_{|z-y|\geqslant\delta} P_{r+1}^{(n)}(z,dy)(\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y))+$$

$$+\left|\int\limits_{|z-y|<\delta} P_{r+1}^{(n)}(z,dy)\sum\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial z^i}(z^i-y^i)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\int\limits_{|z-y|<\delta} P_{r+1}^{(n)}(z,dy)\sum\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z^i\partial z^j}(z^i-y^i)(z^j-y^j)\right|+$$

$$+\int\limits_{|z-y|<\delta} P_{r+1}^{(n)}(z,dy)\left|\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y)+\sum\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial z^i}(y^i-z^i)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z^i\partial z^j}(y^i-z^i)(y^j-z^j)\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\lambda_{n,r+1}(z,\delta)+\sum_k a_{n,r+1}^k(z,\delta)+\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{n,r+1}^{i,j}(z,\delta)+\frac{1}{2}\sum_k b_{n,r+1}^{k,k}(z,\delta)\right],$$

где M — верхняя грань модуля $\varphi_\varepsilon(x,y)$ и ее производных до второго порядка включительно. Из условий теоремы следует, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое N_ε, что

$$\sup_{x\in R^{(m)}}\sup_{|t_i-t_j|\leqslant h} P^{(n)}(i,x,j,V_\varepsilon(x))\leqslant N_\varepsilon h. \tag{8.9}$$

Обозначим $\bar{P}^{(n)}(t,x,s,A)$ переходную марковскую функцию процесса $\xi_n(t)$.

Тогда из (8.9) следует

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{\substack{x\in R^{(m)}\\ |t-s|<h}}\overline{P}^{(n)}(t, x, s, V_\varepsilon(x))=0. \tag{8.10}$$

Таким образом для доказательства теоремы, ввиду 3.2, достаточно доказать, что конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$. Для доказательства этого введем процессы $\overline{\xi}_n(t)=\xi_n(k\Delta_n)$, если $k\Delta_n\leqslant t<(k+1)\Delta_n$. Из (8.9) следует, что

$$\mathbf{P}\{|\overline{\xi}_n(t)-\xi_n(t)|>\varepsilon\}\leqslant N_\varepsilon\Delta_n. \tag{8.11}$$

Поэтому достаточно доказать, что конечномерные распределения $\overline{\xi}_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$. Для доказательства этого утверждения воспользуемся 8.2. Покажем, что для всякой функции $\varphi(t, x)$, удовлетворяющей условиям пункта 1) 8.1, равномерно на каждом компакте

$$\overline{I}^{(n)}\varphi(t, x)=\frac{1}{\Delta_n}\left(\int\varphi(t+\Delta_n, y)\overline{P}^{(n)}(t, x, t+\Delta_n, dy)-\varphi(t, x)\right)\to$$

$$\to\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}a_i(t, x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}b(t, x). \tag{8.12}$$

Действительно

$$\overline{I}^{(n)}\varphi(t, x)=\frac{1}{\Delta_n}\int[\varphi(t+\Delta_n, y)-\varphi(t, y)]\overline{P}^{(n)}(t, x, t+\Delta_n, dy)+$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\int(\varphi(t, y)-\varphi(t, x))\overline{P}^{(n)}(t, x, t+\Delta_n, dy).$$

Первое слагаемое стремится к $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ равномерно на каждом компакте. Второе слагаемое можно представить так:

$$\frac{1}{\Delta_n}\int(\varphi(t, y)-\varphi(t, x))\overline{P}^{(n)}(t, x, t+\Delta_n, dy)=$$

$$=\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t<t_r^{(n)}\leqslant t+\Delta_n}\int\overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\int P_{r+1}(z, dy)(\varphi(t, y)-\varphi(t, z))=$$

$$=\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t<t_r^{(n)}<t+\Delta_n}\int\overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\left(\int_{|y-z|\leqslant\delta}(\varphi(t, y)-\right.$$

$$\left.-\varphi(t, z))P_{r+1}^{(n)}(z, dy)+\int_{|y-z|>\delta}P_{r+1}^{(n)}(z, dy)(\varphi(t, y)-\varphi(t, z))\right).$$

Ввиду условия а)

$$\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\leqslant t_r^{(n)}<t+\Delta_n}\int\overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\int_{|y-z|>\delta}\overline{P}_{r+1}^{(n)}(z, dy)(\varphi(t, y)-\varphi(t, x))\to 0$$

равномерно по t и x.

Рассмотрим

$$\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\leqslant t_r^{(n)}\leqslant t+\Delta_n}\int \overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\int_{|y-z|\leqslant\delta}\overline{P}_{r+1}^{(n)}(z, dy)(\varphi(t, y)-\varphi(t, z))=$$

$$=\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\leqslant t_r^{(n)}\leqslant t+\Delta_n}\int \overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\int_{|y-z|\leqslant\delta}\overline{P}_{r+1}^{(n)}(z, dy)[\varphi(t, y)-\varphi(t, z)-$$

$$-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z^i}(y^i-z^i)-\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}(y^i-z^i)(y^j-z^i)]+$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\leqslant t_r^{(n)}\leqslant t+\Delta_n}\int \overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\Big(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z^i}a_{n,r+1}^i(z,\delta)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}b_{n,r+1}^{i,j}(z,\delta)\Big)=\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\leqslant t_r^{(n)}\leqslant t+\Delta_n}\int \overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\times$$

$$\times\int_{|y-z|<\delta}\alpha_n(z, y, \delta)(y-z)^2P_{r+1}^{(n)}(z, dy)+\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\leqslant t_r^{(n)}\leqslant t+\Delta_n}\int \overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\times$$

$$\times\Big(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z^i}a_{n,r+1}^i(x, \delta)+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}b_{n,r+1}^{i,j}(x, \delta)+$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t<t_r^{(n)}\leqslant t+\Delta_n}\int \overline{P}^{(n)}(t, x, t_r^{(n)}, dz)\Big(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z^i}a_{n,r+1}^i(z, \delta)-a_{n,r+1}^i(x, \delta)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}(b_{n,r+1}^{i,j}(z, \delta)-b_{n,r+1}^{i,j}(x, \delta))\Big). \tag{8.13}$$

Величины $\alpha_n(z, y, \delta)$ определены лишь при $|z-y|\leqslant\delta$ и $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha_n(z, y, \delta)=0$ равномерно на каждом компакте, поэтому первое слагаемое в правой части последнего равенства можно сделать сколь угодно малым равномерно на каждом компакте выбором достаточно малого δ, ввиду условия б). Точно также из условия в) выводится, что второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым равномерно на каждом компакте, а из (8.9) и условия б) легко вывести, что последнее слагаемое при любом δ стремится равномерно на каждом компакте к

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}a_i(t, x)+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}b_{ij}(t, x).$$

Теорема доказана.

Поступила в редакцию
3. 3. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Скороход, Теория вероят. и ее примен., **1**, 3 (1956), 289.
[2] А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей, М., 1936.
[3] И. И. Гихман, ДАН СССР, **82**, № 6 (1952), 837—840.
[4] И. И. Гихман, ДАН СССР, **91**, № 4 (1953), 715—718.
[5] И. И. Гихман, ДАН СССР **91**, № 5 (1953), 1003—1006.

[6] И. И. Гихман, Теория вероят. и ее примен., **1**, 3 (1956).
[7] Маруяма, Rend. Circola Math. Palermo, **4** (1955) русский перевод в сборнике переводов Математика, 1:2 (1957).
[8] А. В. Скороход, ДАН СССР, **106**, 5 (1956).
[9] Ю. В. Прохоров, Теория вероят. и ее примен., **I**, вып. 2 (1956), 177.
[10] А. В. Скороход, Теория вероят. и ее примен., **II**, вып. 2 (1957), 145.
[11] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИИЛ, 1951.
[12] В. Феллер, Trans. AMS, **77**, № 1 (1954).
[13] Е. Б. Дынкин, Теория вероят. и ее примен., **I**, вып. 1 (1956).
[14] J. Neveu, C. R., **240**, № 10 (1955), 1046.
[15] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, 1956.
[16] Е. Б. Дынкин, Изв. АН СССР, сер. матем., **16** (1952).
[17] Дж. Кини, Trans. AMS, **74** (1953), 280—302.
[18] Е. Слуцкий, Труды среднеаз. гос. ун., сер. 5—А, Математика, вып. 31, Ташкент, 1939.
[19] К. Ито, Mem. Am. Math. Soc., № 4 (1951).
[20] И. И. Гихман, Укр. матем. журнал, **3** (1951), 317—339.

LIMIT THEOREMS FOR MARKOV PROCESSES

A. V. SKOROHOD (*KIEV*)

(Summary)

General theorems in [1] are used to obtain concrete results for Markov processes. These results are formulated in terms of infinitesimal operators of Markov processes (see [13]). It is proved, with some general assumptions made, that the convergence of initial distributions and infinitesimal operators of processes is entailed with the convergence of distributions of J_1-continuous functionals of these processes (see [1]).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том III *Выпуск 3*
1958

НЕЗАВИСИМОСТЬ КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СТАТИСТИК И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А. А. ЗИНГЕР

Введение

Пусть $\Xi = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами. В различных вопросах математической статистики бывает весьма важно охарактеризовать распределение компонент вектора Ξ по некоторым свойствам статистик * $S(\Xi)$. К числу таких свойств можно отнести например следующие: известно распределение данной статистики $S(\Xi)$, две данные статистики $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ одинаково распределены, две данные статистики $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ имеют независимые распределения. Подробный обзор, посвященный работам по упомянутым задачам, содержится в [14].

Мы будем интересоваться лишь задачами третьего типа, т. е. определением класса распределений вектора Ξ, когда известно, что существуют две независимые статистики.

Отдельные случаи этой задачи рассматривались многими авторами.

В. П. Скитович исследовал в работе [17] случай, когда данные статистики линейны и показал, что нетривиальные случаи независимости линейных форм могут иметь место только для нормально распределенных векторов Ξ. Это же было доказано Дармуа в [3].

В работах [4 8, 11, 13] исследуются различные вопросы независимости линейной и квадратичной форм для случая одинаково распределенных компонент вектора Ξ. В заметке [1] рассмотрен случай, когда дана независимость выборочного среднего и несмещенной оценки для k-го семиинварианта. Это свойство при условии существования соответствующих генеральных моментов имеет место только для нормально распределенных векторов.

В 1956 году Ю. В. Линником была опубликована работа [12], в которой рассматривался случай, когда дана независимость выборочного среднего $\overline{X}$ и некоторой полиномиальной статистики $P(\Xi)$, которая подчиняется лишь весьма общим условиям.

Во всех перечисленных работах изучение основывается на том, что из условия независимости соответствующих статистик можно вывести некоторые уравнения для характеристических функций распределений компонент вектора Ξ. Эти уравнения, как правило, имеют сложный характер и для их решения очень важно использовать различные аналитические свойства распределений компонент вектора Ξ.

---

* Под статистикой, как обычно, понимается однозначная измеримая функция.

В работе [12] Ю. В. Линником предложен метод, позволяющий из независимости некоторых статистик выводить аналитические свойства распределений компонент вектора Ξ. Настоящая работа посвящена изучению аналитических свойств распределений компонент вектора Ξ на основе развития и уточнения метода Ю. В. Линника для случая, когда данные статистики квазиполиномиальны.

Определение 1*. Статистику $S(\Xi)$ будем называть *квазиполиномиальной*, если существует такая непрерывная функция $\varphi(\Xi)$ и такие два неотрицательных полинома $r(\Xi)$ и $R(\Xi)$ одинаковой степени, что при всех Ξ

$$r(\Xi) \leqslant \varphi(S(\Xi)) \leqslant R(\Xi).$$

Полиномы $r(\Xi)$ и $R(\Xi)$ называются соответственно *нижним* и *верхним*.

Определение 2**. Полином $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *допустимым* по X_j, если в его несократимую запись входит X_j^m, где m степень полинома $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Определение 3. Квазиполиномиальную статистику $S(\Xi)$ будем называть *допустимой* по X_j, если ее нижний полином допустим по X_j.

В § 1 настоящей работы рассмотрен вопрос о существовании моментов и доказано, что, если даны две независимые квазиполиномиальные допустимые по всем координатам статистики, то компоненты вектора Ξ имеют конечные абсолютные моменты любого положительного порядка.

В § 2 разбирается случай, когда одна из данных статистик линейна. Здесь оказывается, что характеристические функции распределений компонент вектора Ξ могут быть продолжены на всю комплексную плоскость как целые функции конечного порядка.

В § 3 даны некоторые применения результатов, полученных в предыдущих параграфах***.

Прежде чем переходить к изложению основного содержания, сформулируем и докажем одну общую лемму о независимых статистиках. Она найдет в дальнейшем некоторое применение.

Лемма 1. *Для того чтобы две статистики $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной функции двух переменных $F(x, y)$ статистики*

$$F(S_1(\Xi), S_2(\Xi)) \text{ и } F(S_1(\Xi), S_2(\Xi'))$$

были одинаково распределены. Здесь Ξ' вектор, распределенный одинаково и независимо с Ξ.

Доказательство. Достаточность. Положим $F(x, y) = t_1 x + t_2 y$, где t_1 и t_2 любые вещественные числа.

Из одинаковой распределенности

$$t_1 S_1(\Xi) + t_2 S_2(\Xi) \text{ и } t_1 S_1(\Xi) + t_2 S_2(\Xi')$$

---

* Определение квазиполиномиальных статистик дано Ю. В. Линником в докладе на IV совещании по теории вероятностей в Ленинграде в 1955 г.

** См. [12].

*** Основные результаты настоящей работы сформулированы в заметке автора [5].

следует *

$$\mathbf{E}\{\exp[it_1S_1(\Xi)+it_2S_2(\Xi)]\}=\mathbf{E}\{\exp[it_1S_1(\Xi)]\}\cdot\mathbf{E}\{\exp[it_2S_2(\Xi)]\}.$$

Т. к. это соотношение имеет место при любых вещественных t_1 и t_2, то согласно свойствам характеристических функций (см. [10] стр. 293), отсюда следует, что $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ независимы.

Необходимость. Из независимости $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ вытекает, что двумерные величины

$$(S_1(\Xi),\ S_2(\Xi))\ \text{и}\ (S_1(\Xi),\ S_2(\Xi'))$$

одинаково распределены, а отсюда в свою очередь следует в частности, что одинаково распределены величины

$$F(S_1(\Xi),\ S_2(\Xi))\ \text{и}\ F(S_1(\Xi),\ S_2(\Xi')),$$

а это и требуется. Лемма доказана.

§ 1.

Разберем вопрос о существовании моментов. Он рассматривался в случае независимости линейной и полиномиальной статистик при условии априорного существования конечного абсолютного момента какой-либо положительной степени в работах [12] и [20]. Мы докажем здесь две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\Xi=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *— случайный вектор с независимыми компонентами,* $S_1(\Xi)$ *и* $S_2(\Xi)$ *— две квазиполиномиальные статистики, допустимые по всем* $X_j (j=1, 2, \ldots, n)$.

Если статистики $S_1(\Xi)$ *и* $S_2(\Xi)$ *независимы, то для каждой компоненты вектора* Ξ *имеет место соотношение* **

$$\mathbf{P}\{|X_j|\geqslant x\}=O\{\exp(-x^a)\} \tag{1.1}$$

$j=1, 2, \ldots, n;\ x>0;\ a>0$ *— некоторая постоянная.*

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 распределение каждой компоненты вектора* Ξ *имеет конечные абсолютные моменты любого положительного порядка.*

Начнем с двух простых лемм, на которые будет опираться доказательство теорем 1 и 2.

Лемма 2. *Для любой неотрицательной случайной величины* X *с функцией распределения* $F(x)=\mathbf{P}\{X<x\}$ *имеет место соотношение*

$$\int_0^\infty \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^\delta}<\infty \tag{1.2}$$

при $0<\delta<1$.

Доказательство***. Рассмотрим отдельно три случая:

1°. Распределение X дискретно.

2°. $F(x)$ — непрерывная функция.

3°. Общий случай.

---

* Символ $\mathbf{E}\{\cdot\}$ означает математическое ожидание.

** Символ $\mathbf{P}\{\cdot\}$ означает вероятность события, указанного в скобках.

*** Не нарушая общности, можно считать, что $1-F(x)>0$ при всех $x<\infty$.

Пусть имеет место 1°. Обозначим $\{P_i\}$ скачки функции $F(x)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1.$$

В этом случае

$$\int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i}{(p_i + p_{i+1} + \ldots)^{\delta}}. \tag{1.3}$$

Покажем, что (1.3) ограничено.

Для простоты введем обозначения

$$\alpha_i = p_i + p_{i+1} + \ldots .$$

Очевидно

$$1 = \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > 0,$$

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0,$$

$$\frac{p_i}{(p_i + p_{i+1} + \ldots)^{\delta}} = \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{\alpha_i^{\delta}} = (\alpha_i^{1-\delta} - \alpha_{i+1}^{1-\delta}) \cdot \frac{1 - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}}{1 - \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)^{1-\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha_i^{1-\delta} - \alpha_{i+1}^{1-\delta}) \frac{1}{1-\delta}. \tag{1.4}$$

Из (1.4) немедленно вытекает в силу свойств $\{\alpha_i\}$, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \leqslant \frac{1}{1-\delta}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим случай 2°. Возьмем какое-либо $x_0 > 0$ и построим $F_n(x)$ следующим образом

$$F_n(x) = F\left(\frac{k}{n} x_0\right) \text{ при } \frac{k}{n} x_0 < x \leqslant \frac{k+1}{n} x_0. \tag{1.6}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots; \; n > 0$$

Очевидно, что

$$F_n(x) < F(x)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Возьмем какое-либо $\varepsilon > 0$. По ε и x_0 можно указать такое n_0, что для всех $n > n_0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$

$$0 < F(x) - F_n(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} [1 - F(x_0)]^{1+\delta}. \tag{1.7}$$

На основании теоремы Хелли (см. например [2] стр. 220)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{x_0} \frac{dF_n(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} = \int_0^{x_0} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}}. \tag{1.8}$$

Поэтому можно указать такое n', что для всех $n > n'$

$$\int_0^{x_0} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} - \int_0^{x_0} \frac{dF_n(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Составим разность

$$\int_0^{x_0} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} - \int_0^{x_0} \frac{dF_n(x)}{[1-F_n(x)]^{\delta}} =$$

$$= \left\{ \int_0^{x_0} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} - \int_1^{x_0} \frac{dF_n(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \right\} + \left\{ \int_0^{x_0} \frac{dF_n(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} - \int_0^{x_0} \frac{dF_n(x)}{[1-F_n(x)]^{\delta}} \right\} \tag{1.10}$$

Первая скобка в правой части (1.10) оценивается посредством (1.9), для оценки второй скобки можно воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{[1-F(x)]^{\delta}} - \frac{1}{[1-F_n(x)]^{\delta}} \leqslant \frac{F(x)-F_n(x)}{[1-F(x)]^{1+\delta}} \leqslant \frac{F(x)-F_n(x)}{[1-F(x_0)]^{1+\delta}}, \tag{1.11}$$

а также (1.7).

При этом получится из (1.10)

$$\int_0^{x_0} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \leqslant \int_0^{x_0} \frac{dF_n(x)}{[1-F_n(x)]^{\delta}} + \varepsilon,$$

или, используя 1°,

$$\int_1^{x_0} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \leqslant \frac{1}{1-\delta} + \varepsilon. \tag{1.12}$$

Так как x_0 и ε произвольны, отсюда вытекает

$$\int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \leqslant \frac{1}{1-\delta} < \infty. \tag{1.13}$$

Теперь возьмем случай 3°. Согласно общей теореме (см. например [9] стр. 27), каждую функцию распределения $F(x)$ можно разложить на дискретную $G(x)$ и непрерывную $H(x)$ компоненты, т. е.

$$F(x) = gG(x) + hH(x). \tag{1.14}$$

Здесь g и h два неотрицательных числа ($g + h = 1$).

Заметив (1.14), найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \leqslant g \int_0^{\infty} \frac{dG(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} + h \int_0^{\infty} \frac{dH(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant g^{1-\delta} \int_0^{\infty} \frac{dG(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} + h^{1-\delta} \int_0^{\infty} \frac{dH(x)}{[1-F(x)]^{\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant (g^{1-\delta} + h^{1-\delta}) \frac{1}{1-\delta} \leqslant \frac{2^{\delta}}{1-\delta} < \infty. \tag{1.15}$$

Лемма 2 доказана полностью.

Лемма 3. *Пусть X — неотрицательная случайная величина с законом распределения $F(x)$. Если при некоторых $\alpha (0<\alpha<1)$ и $\Delta>1$ имеет место*

$$\int_0^\infty \frac{dF(x)}{[1-F(\alpha x)]^\Delta} < \infty, \tag{1.16}$$

то при $x>0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{X \geqslant x\} = O(\exp(-x^\beta)), \tag{1.17}$$

где $\beta>0$ — некоторая постоянная.

Доказательство*. Согласно условию (1.16) существует такое x_0, что для всех $x>x_0$

$$\int_x^\infty \frac{dF(x)}{[1-F(\alpha x)]^\Delta} \leqslant 1. \tag{1.18}$$

Благодаря монотонности $F(x)$, отсюда получим

$$\frac{1-F(x)}{[1-F(\alpha x)]^\Delta} \leqslant 1. \tag{1.19}$$

Обозначим для простоты

$$1-F(\alpha x) = \varphi(y),\ y = \alpha x.$$

Тогда вместо (1.19) можно написать

$$\varphi\left(\frac{1}{\alpha} y\right) \leqslant \varphi^\Delta(y), \tag{1.20}$$

причем (1.20) справедливо при $y \geqslant y_0 = \frac{1}{\alpha} x_0$.

Возьмем

$$y = y_0,\ \frac{1}{\alpha} y_0, \ldots$$

и из (1.20) получим последовательно

$$\varphi\left(\frac{1}{\alpha^k} y_0\right) \leqslant [\varphi(y_0)]^{\Delta^k}, \tag{1.21}$$

Для каждого $y \geqslant y_0$ можно указать такое целое $k \geqslant 0$, что

$$\frac{1}{\alpha^k} y_0 \leqslant y < \frac{1}{\alpha^{k+1}} y_0. \tag{1.22}$$

Использование монотонности $\varphi(y)$, а также (1.21) и (1.22), очевидным образом приводят нас к утверждению леммы.

Замечание. Как видно из доказательства леммы, условия $\Delta>1$, $0<\alpha<1$ существенны. При $\alpha = 1$ и $\Delta > 1$ интеграл в (1.16) всегда расходится. Если же взять $\Delta = 1$, но $0<\alpha<1$, то рассуждения, вполне ана-

* См. сноску на стр. 267.

логичные приведенным, дадут лишь оценку при $x > 0$

$$\mathbf{P}\{X \geqslant x\} = O(x^{-A}), \tag{1.23}$$

где $A > 0$ любое.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Мы рассматриваем случайный вектор $\Xi = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ с независимыми компонентами и две квазиполиномиальные, допустимые по всем компонентам статистики $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$, которые предполагаются независимыми.

Не нарушая общности, можно считать, что сами статистики $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ удовлетворяют неравенствам в определении 1.

Чтобы не делать в дальнейшем специальных оговорок, будем считать, что ни одна из компонент не имеет распределения, сосредоточенного на конечном интервале. Это допущение не нарушает общности рассуждений, так как для компонент, имеющих распределение, сосредоточенное на конечном интервале, теорема тривиальна, а для остальных можно рассуждать так, как мы это делаем.

Пусть $r_1(\Xi)$, $R_1(\Xi)$ и $r_2(\Xi)$, $R_2(\Xi)$ соответственно нижний и верхний полиномы для $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$. Обозначим $F_j(x) = \mathbf{P}\{X_j < x\}\ j = 1, 2, \ldots, n$ функции распределения компонент вектора Ξ.

Возьмем сначала компоненту X_1. Можно указать ограниченную $n-1$-мерную область G так, чтобы

$$\int_G \ldots \int dF_2(x_2) \ldots dF_n(x_n) = \gamma > 0. \tag{1.24}$$

При этом можно указать такое достаточно большое число C_1*, что при $|X_1| > C_1$ и при $(X_2, \ldots, X_n) \in G$ будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} r_1(\Xi) &\geqslant C_2 X_1^{2k}, \\ r_2(\Xi) &\geqslant C_3 X_1^{2l}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Здесь $2k$ и $2l$ — степени многочленов $r_1(\Xi)$ и $r_2(\Xi)$ соответственно (четность степеней полиномов следует из их неотрицательности).

Для верхних полиномов можно использовать очевидные неравенства

$$\begin{aligned} R_1(\Xi) &\leqslant C_4(|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|)^{2k} + C_4, \\ R_2(\Xi) &\leqslant C_4(|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|)^{2l} + C_4. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Выберем два числа $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ из условий

$$\begin{aligned} \lambda \sqrt[2k]{R_1(\Xi)} &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |X_j| + 1, \\ \mu \sqrt[2l]{R_2(\Xi)} &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |X_j| + 1. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Согласно (1.26) это возможно.

* Числа $C_1, C_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные.

Обозначим

$$\widetilde{S}_1(\Xi) = \lambda \sqrt[2k]{S_1(\Xi)} - 1,$$
$$\widetilde{S}_2(\Xi) = \mu \sqrt[2l]{S_2(\Xi)} - 1. \tag{1.28}$$

Из определения квазиполиномиальных статистик и из (1.25) и (1.27) следует, что существует такое $\alpha_1 > 0$, что

$$\alpha_1 |X_1| \leqslant \widetilde{S}_1(\Xi) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |X_j| + 1,$$
$$\alpha_1 |X_1| \leqslant \widetilde{S}_2(\Xi) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |X_j| + 1. \tag{1.29}$$

Заметим, что в (1.29) правые соотношения выполняются при всех значениях Ξ, а левые только при $|X_1| > C_5$ и $(X_2, X_3, \ldots, X_n) \in G$ (см. (1.25) и (1.26)). Из (1.29) также следует, что $\alpha_1 \leqslant \frac{1}{n}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\Omega(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{|X_j| \geqslant x\}}. \tag{1.30}$$

Согласно сделанному вначале предположению эта функция конечна при всех $-\infty < x < \infty$. Функция $\Omega(x)$ является неубывающей.

Если ввести случайную величину X с функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F_j(x), \tag{1.31}$$

то, используя эту величину, $\Omega(x)$ можно записать так

$$\Omega(x) = \frac{1}{n \mathbf{P}\{|X| \geqslant x\}}. \tag{1.32}$$

Так как по предположению $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ независимы, то можно написать (пока только формально)

$$\mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_1(\Xi))\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_2(\Xi))\} = \mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_1(\Xi))\} \cdot \mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_2(\Xi))\}. \tag{1.33}$$

Выберем δ из интервала $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Для обоснования (1.33) достаточно показать, что входящие в одну из частей его математические ожидания имеют конечную величину.

Возьмем $\mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_1(\Xi))\}$. Используя (1.29), можно написать

$$\mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_1(\Xi))\} \leqslant \mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_1(\Xi))\}. \tag{1.34}$$

В выборочном пространстве $X = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n)\}$ рассмотрим n множеств, определяемых так:

$$E_j = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \,|\, |X_j| \geqslant |X_i|,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \qquad (1.35)$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Каждая точка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ принадлежит по крайней мере одному E_j, и поэтому

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

и из (1.34) следует

$$\mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(S_1(\Xi))\} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(|X_j|)\}, \qquad (1.36)$$

или, используя распределение случайной величины X (см. (1.31)),

$$\mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(S(\Xi))\} \leqslant n \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^{\delta}(|x|)\, d\Phi(x). \qquad (1.37)$$

Так как

$$\Omega(x) = \frac{n^{-1}}{\mathbf{P}\{|X| > x\}} \text{ и } 0 < \delta < 1,$$

то, применяя лемму 2 к величине $|X|$, мы из (1.37) получим

$$\mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_1(\Xi))\} < \infty. \qquad (1.38)$$

Таким же точно образом можно убедиться, что

$$\mathbf{E}\{\Omega^{\delta}(\widetilde{S}_2(\Xi))\} < \infty. \qquad (1.39)$$

Итак, справедливость (1.33) можно считать доказанной (см. [15], стр. 188).

Если в левой части (1.33) интегрирование по всему пространству заменить интегрированием по множеству

$$\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \,|\, |X_1| > C_1,\ (X_2, X_3, \ldots, X_n) \in G\}, \qquad (1.40)$$

то из монотонности $\Omega(x)$, левых соотношений (1.29), а также (1.24) будет следовать

$$\mathbf{E}\{\Omega^{2\delta}(\alpha_1 |X_1|)\} < \infty. \qquad (1.41)$$

Точно такие же рассуждения можно провести для отдельных $X_j (j = 2, \ldots, n)$.

Поэтому можно указать такое α, $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$, что

$$\mathbf{E}\{\Omega^{2\delta}(\alpha |X_j|)\} < \infty \ (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.42)$$

Отсюда немедленно следует

$$\mathbf{E}\{\Omega^{2\delta}(\alpha |X|)\} < \infty, \qquad (1.43)$$

где X — случайная величина с законом распределения (1.31).

Мы выбрали $\frac{1}{2} < \delta < 1$. Следовательно $2\delta > 1$. Из (1.43) следует возможность применения к величине X леммы 3. Значит при $x > 0$

$$\mathbf{P}\{|X| \geqslant x\} = O(\exp(-x^{\beta})) \tag{1.44}$$

и следовательно

$$\mathbf{P}\{|X_j| \geqslant x\} = O(\exp(-x^{\beta})) \ (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.45}$$

что и требовалось. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 является очевидным следствием теоремы 1.

Возьмем какое-либо $m > 0$. Существует такое C_6, что при всех $x \geqslant 0$

$$x^{m+1} e^{-x^{\beta}} \leqslant C_6. \tag{1.46}$$

Из теоремы 1 вытекает с учетом (1.46), что при достаточно больших x

$$\mathbf{P}\{|X_j| \geqslant x\} \leqslant \frac{C_7}{x^{m+1}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.47}$$

Из (1.47) непосредственно следует, что распределение компоненты X_j имеет конечный абсолютный момент порядка m.

Замечание. При доказательстве теорем 1 и 2 мы существенно пользовались допустимостью обеих статистик $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$. Если для одной из статистик это условие нарушено, то существование моментов можно доказать при дополнительном ограничении: при каком-либо целом $s > 0$ существует конечное математическое ожидание

$$\mathbf{E}\{\log(1 + \log(1 + \ldots + \log(1 + |X_j|)\ldots))\} < \infty \ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.48}$$

Заметим еще, что если компоненты вектора Ξ имеют одинаковые распределения, то все условия надо накладывать только на одну координату.

§ 2

Будем продолжать изучение аналитических свойств распределений компонент вектора Ξ.

В качестве одной из данных статистик возьмем линейную форму. При этом результаты предыдущего параграфа можно значительно усилить.

Докажем здесь две теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\Xi = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами, $S_1(\Xi)$ — квазиполиномиальная допустимая по всем компонентам статистика, $S_2(\Xi)$ — допустимая по всем компонентам линейная форма.*

Если статистики $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ независимы, то для $j = 1, 2, \ldots, n$ и $0 < \tau < \infty$

I) *существуют конечные математические ожидания*

$$\mathbf{E}\{\exp(\tau |X_j|)\} < \infty, \tag{2.1}$$

II) *имеют место оценки*

$$\mathbf{E}\{\exp(\tau |X_j|)\} = O(\exp(\tau^A)), \tag{2.2}$$

где $A \geqslant 1$ — некоторая постоянная.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 3 *характеристические функции компонент вектора* Ξ

$$f_j(t) = \mathbf{E}\{\exp(itX_j)\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

продолжимы на всю комплексную плоскость и являются целыми функциями конечного порядка.

Переходя к доказательству, заметим прежде всего, что теорема 4 является непосредственным следствием теоремы 3.

Действительно, пусть $z = t + \tau i$ комплексное число. Рассмотрим

$$\int e^{izx}\, dF_j(x). \tag{2.4}$$

Благодаря наличию оценки

$$\left|\int e^{izx}\, dF_j(x)\right| \leqslant \int e^{-\tau x}\, dF_j(x) \leqslant \int e^{|\tau|\,|x|}\, dF_j(x). \tag{2.5}$$

Из I) теоремы 3 следует, что (2.4) представляет собой целую функцию, совпадающую на вещественной оси ($\tau = 0$) с $f_j(t)$. Из II) теоремы 3 с использованием (2.2) и (2.5) следует, что эта функция конечного порядка. Таким образом доказывать остается лишь теорему 3.

Все доказательство разделим естественным образом на 3 части.

Сначала докажем I) для малых τ, затем для всех $\tau > 0$, а после этого докажем II).

Будем доказывать I) для малых значений $\tau > 0$.

Прежде всего заметим, что статистику $S_2(\Xi) = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ можно считать равной $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, так как всегда возможно преобразование $X_j' = a_jX_j$ (по условию $a_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Так же как при доказательстве теоремы 1, выберем достаточно большое C_8 и $(n-1)$-мерную конечную область G так, чтобы

$$\int\limits_G \ldots \int dF_2(x_2) \ldots dF_n(x_n) = \gamma > 0 \tag{2.6}$$

и при $|X_1| > C_8$ и $(X_2, \ldots, X_n) \in G$

$$S_1(\Xi) \geqslant r_1(\Xi) \geqslant C_9 X_1^{2k}. \tag{2.7}$$

Здесь $r_1(\Xi)$ — нижний полином для $S_1(\Xi)$, а $2k$ — его степень.

Введем статистику

$$\bar{S}_1(\Xi) = \sqrt[m]{S_1^{2k}(\Xi)}, \tag{2.8}$$

где $m > 0$ — некоторое число.

Так как статистики $\bar{S}_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ независимы, то можно написать

$$\mathbf{E}\{\bar{S}_1(\Xi)\,|X_1 + X_2 + \ldots + X_n|^N\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\bar{S}_1(\Xi)\}\,\mathbf{E}\{|X_1 + X_2 + \ldots + X_n|^N\} \quad (N = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.9}$$

Существование математических ожиданий, входящих в (2.9), обеспечивается очевидно теоремой 2. Из (2.9) получим, используя (2.6) и (2.7),

$$C_{10}\int\limits_{|x_1|>C_8}|x_1|^m\,dF_1(x_1)\int\limits_G\dots\int|x_1+x_2+\dots+x_n|^N\,dF_2(x_2)\dots dF_n(x_n)\leqslant$$

$$\leqslant c\int\dots\int|x_1+x_2+\dots+x_n|^N\,dF_1(x_1)\,dF_2(x_2)\dots dF_n(x_n). \tag{2.10}$$

Здесь обозначено $c=\mathbf{E}\{\overline{S}_1(\Xi)\}$.

Воспользуемся очевидным неравенством

$$||x_1|-|x_2+\dots+x_n||\leqslant|x_1+x_2+\dots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$$

и получим из (2.10)

$$\int\limits_{|x_1|>C_8}|x_1|^m\,dF_1(x_1)\int\limits_G\dots\int||x_1|-|x_2+\dots+x_n||^N\,dF_2(x_2)\dots dF_n(x_n)\leqslant \tag{2.11}$$

$$\leqslant C_{11}\int\dots\int(|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|)^N\,dF_1(x_1)\dots dF_n(x_n).$$

Прибавим к обеим частям (2.11) по

$$I_1=\frac{1}{\gamma}\int\limits_{|x_1|\leqslant C_8}|x_1|^m\,dF_1(x_1)\int\limits_G\dots\int||x_1|-|x_2+\dots+x_n||^N\,dF_2(x_2)\dots dF_n(x_n)$$

и введем обозначения

$$\alpha_k^j=\mathbf{E}\{|X_j|^k\}=\int|x|^k\,dF_j(x) \tag{2.12}$$

$$b_k^1=\frac{1}{\gamma}\int\dots\int|x_2+\dots+x_n|^k\,dF_2(x_2)\dots dF_n(x_n).$$

При этом получится из (2.11)

$$\alpha_{N+m}^1-\sum_{\nu=1}^{N}C_N^\nu\alpha_{N+m-\nu}^1 b_\nu^1\leqslant$$

$$\leqslant I_1+C_{11}\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=N}\frac{N!}{i_1!i_2!\dots i_n!}\,\alpha_{i_1}^1\alpha_{i_2}^2\dots\alpha_{i_n}^n, \tag{2.13}$$

или

$$\alpha_{N+m}^1\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}C_N^\nu\alpha_{N+m-\nu}^1 b_\nu^1+I_1+$$

$$+C_{11}\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=N}\frac{N!}{i_1!i_2!\dots i_n!}\,\alpha_{i_1}^1\alpha_{i_2}^2\dots\alpha_{i_n}^n. \tag{2.14}$$

Неравенства, аналогичные (2.14), можно получить и для остальных X_j $j=2,\dots,n$ заменой X_1 на X_j, так что

$$\alpha^j_{N+m} \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} C^\nu_N \alpha^j_{N+m-\nu} b^j_\nu + I_j +$$

$$+ C_{12} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=N} \frac{N!}{i_1! i_2! \ldots i_n!} \alpha^1_{i_1} \alpha^2_{i_2} \ldots \alpha^n_{i_n} \tag{2.15}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n; \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Для достижения цели, поставленной в первой части доказательства, достаточно доказать оценку:

$$\alpha^i_k \leqslant k!\, M^k \tag{2.16}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, $M > 0$ — некоторая постоянная. Эту оценку будем доказывать по индукции, используя (2.15).

Фиксируем теперь два целых числа m и m_0 под условием

$$n - 1 \leqslant m < m_0. \tag{2.17}$$

Число M подчиним условию: оценка (2.16) выполняется для всех $k \leqslant m_0$ (дальше на M будет наложено еще несколько условий). Это условие составит базу для индукции. Допустим теперь, что (2.16) доказано для $k \leqslant N + m - 1$, докажем ее и при $k = N + m$. На основании индукционного допущения оценим правую часть (2.15).

Возьмем

$$\sum_{\nu=1}^{N} C^\nu_N \alpha^1_{N+m-\nu} b^1_\nu. \tag{2.18}$$

Так как область G ограничена, то $|x_2 + \ldots + x_n|$ на ней ограничено. Поэтому можно указать такое $b > 0$, что

$$b^1_\nu = \frac{1}{\gamma} \int_G \ldots \int |x_2 + \ldots + x_n|^\nu dF_2(x_2) \ldots dF_n(x_n) \leqslant b^\nu; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.19}$$

Учитывая это, найдем

$$\sum_{\nu=1}^{N} C^\nu_N \alpha^1_{N+m-\nu} b^1_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} \frac{N(N-1)\ldots(N-\nu+1)}{\nu!} \times$$

$$\times (N+m-\nu)!\; M^{N+m-\nu} b^\nu \leqslant (N+m)!\; M^{N+m} (e^{\frac{b}{M}} - 1). \tag{2.20}$$

Пусть M столь большое, что

$$e^{\frac{b}{M}} \leqslant \frac{3}{2}. \tag{2.21}$$

При этом из (2.20) следует

$$\sum_{\nu=1}^{N} C^\nu_N \alpha^1_{N+m-\nu} b^1_\nu \leqslant \frac{1}{2} (N+m)!\; M^{N+m}. \tag{2.22}$$

Соображения, аналогичные использованным при выводе (2.19), показывают, что можно указать такое число $B>0$, что

$$I_1 \leqslant B^N \quad (N=1, 2, \ldots). \tag{2.23}$$

Обратимся к последней сумме в (2.15)

$$C_{12} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=N} \frac{N!}{i_1!i_2!\ldots i_n!}\alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \ldots \alpha_{i_n}^n \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} N!\ M^N \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=N} 1. \tag{2.24}$$

Легко видеть, что число решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_n=N$ в целых неотрицательных числах не превосходит $(N+1)^{n-1}$, поэтому из (2.24) вытекает

$$C_{12} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=N} \frac{N!}{i_1!\ i_2!\ \ldots\ i_n!}\alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \ldots \alpha_{i_n}^n \leqslant C_{12}(N+n-1)!\, M^N. \tag{2.25}$$

Согласно выбору $m \geqslant n-1$. Будем считать

$$M \geqslant (4B,\ 4C_{12}). \tag{2.26}$$

При этом из (2.14) с учетом (2.22), (2.23) и (2.25) следует

$$\alpha'_{N+m} \leqslant (N+m)!\, M^{N+m}.$$

Такие же оценки, путем проведения аналогичных рассуждений можно получить и для α_{N+m}^k, $k=2, 3, \ldots, n$ (можно считать, что b и B выбраны сразу для всех $k=1, 2, \ldots, n$).

Таким образом (2.16) доказана.

Из (2.16) следует, что при $0 \leqslant \tau < \frac{1}{M}$

$$\mathrm{E}\{\exp(\tau|X_j|)\} < \infty. \tag{2.27}$$

Покажем, что (2.27) справедливо при всех $\tau > 0$. Пусть τ_0 — точная верхняя грань тех τ, для которых

$$\mathrm{E}\{\exp(\tau|X_j|)\} < \infty \quad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Очевидно $\tau_0 \geqslant \frac{1}{M}$. Выберем $\mu > 0$ так, чтобы при всех значениях Ξ

$$\widetilde{S}_1(\Xi) = \mu S_1(\Xi)^{\frac{1}{2k}} < \frac{1}{M}\Sigma|X_j| + 1. \tag{2.28}$$

При этом найдено такое $\beta > 0$, что при $|X_1| > C_8$ и $(X_2, X_3, \ldots, X_n) \in G$ (см. (2.6), (2.7))

$$\widetilde{S}_1(\Xi) \geqslant \beta|X_1|. \tag{2.29}$$

Положим

$$0 < \tau < \tau_0 \tag{2.30}$$

и рассмотрим соотношение

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left[\widetilde{S}_1(\Xi) + \tau\left|\sum_{j=1}^{n} X_j\right|\right]\right\} = \mathbf{E}\left\{\exp\left[\widetilde{S}_1(\Xi)\right]\right\} + \mathbf{E}\left\{\exp\tau\left|\sum_{j=1}^{n} X_j\right|\right\}. \tag{2.31}$$

Существование математических ожиданий, входящих в (2.31), обеспечивается (2.27) и (2.28). Из (2.31) следует, что

$$\int\limits_{|X_1|>C_8} dF_1(x_1) \int\limits_{G} \dots \int dF_2(x_2) \dots dF_n(x_n) \exp\left[\widetilde{S}_1(\Xi) + |\Sigma X_s|\right] < \infty \tag{2.32}$$

и следовательно

$$\int\limits_{|x_1|>C_8} e^{\tau|x_1|+\beta|x_1|} dF_1(x_1) < \infty \tag{2.33}$$

и значит

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left[(\tau+\beta)|x_1|\right]\right\} < \infty \tag{2.34}$$

при всех $0 < \tau < \tau_0$.

Соотношения, аналогичные (2.34), можно, очевидно, получить и для остальных x_j; $j = 2, \dots, n$, так что можно считать установленным

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left[(\tau+\beta)|x_j|\right]\right\} < \infty, \quad 0 < \tau < \tau_0 \ (j = 1, 2, \dots, n). \tag{2.35}$$

Выберем τ из интервала

$$\tau_0 - \beta < \tau < \tau_0 \tag{2.36}$$

и мы сразу получим, что (2.35) находится в противоречии с выбором $\tau_0 (\tau + \beta > \tau_0)$. Значит конечного τ_0 не существует, и (2.27) справедливо для всех $\tau > 0$.

Утверждение I) теоремы 3 доказано полностью.

Перейдем к доказательству утверждения II) теоремы 3.

Введем статистику

$$\overline{\widetilde{S}}_1(\Xi) = \lambda\left[S_1(\Xi)\right]^{\frac{1}{2k}}. \tag{2.37}$$

Здесь $2k$ — степень нижнего и верхнего полиномов для статистики $S_1(\Xi)$. Число λ выбирается из условия

$$\overline{\widetilde{S}}_1(\Xi) \leqslant |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| + 1. \tag{2.38}$$

Выберем теперь, как и раньше, $(n-1)$-мерную область G и достаточно большое C_{13}, так чтобы при $|X_1| > C_{13}$ и $(X_2, \dots, X_n) \in G$

$$\int \dots \int_{G} dF_2(x_2) \dots dF_n(x_n) = \gamma_1 > 0, \tag{2.39}$$

$$\overline{\widetilde{S}}_1(\Xi) \geqslant C_{14}|X_1|; \quad |X_1 + X_2 + \dots + X_n| \geqslant \left(1 - \frac{C_{14}}{2}\right)|X_1|.$$

В силу независимости $\overline{\overline{S}}_1(\Xi)$ и $X_1+X_2+\ldots+X_n$ можно написать

$$\mathbf{E}\{\exp[\tau\overline{\overline{S}}_1(\Xi)+\tau(X_1+X_2+\ldots+X_n)]\}=$$

$$=\mathbf{E}\{\exp[\tau\overline{\overline{S}}_1(\Xi)]\}\cdot\mathbf{E}\{\exp[\tau(X_1+X_2+\ldots+X_n)]\}. \tag{2.40}$$

Будем считать $\tau>0$. Существование математических ожиданий, входящих в (2.40), благодаря (2.38) обеспечивается доказанным уже I) теоремы 3.

$$\mathbf{E}\{\exp(\tau\overline{\overline{S}}_1(\Xi))\}\leqslant\mathbf{E}\{\exp\tau(|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|)\}e^{\tau},$$

$$\mathbf{E}\{\exp(\tau|X_1+X_2+\ldots+X_n|)\}\leqslant \tag{2.41}$$

$$\leqslant\mathbf{E}\{\exp\tau(|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|)\}.$$

Из (2.40) и (2.41), интегрируя в левой части (2.40) только по области

$$\{(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)\,|\,|X_1|>C_{13},(X_2,\ \ldots,\ X_n)\in G\},$$

получим:

$$\gamma_1\int\limits_{|x_1|>C_{13}}e^{\tau\left(1+\frac{C_{14}}{2}\right)|x_1|}dF_1(x_1)\leqslant[\mathbf{E}\{\exp[\tau(|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|)]\}]^2. \tag{2.42}$$

Если к обеим частям (2.41) прибавить по

$$\gamma_1\int\limits_{|x_1|\leqslant C_{13}}e^{\tau\left(1+\frac{C_{14}}{2}\right)|x_1|}dF_1(x_1)\leqslant\gamma_1\exp(C_{15}\tau) \tag{2.43}$$

и обозначить

$$\mathbf{E}\{\exp(\tau|X_j|)\}=\varphi_j(\tau)\qquad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то из (2.42) получится

$$\varphi_1\left(\left(1+\frac{C_{14}}{2}\right)\tau\right)\leqslant\exp(C_{15}\tau)+\frac{e^{\tau}}{\gamma_1}\prod_{j=1}^{n}\varphi_j^2(\tau). \tag{2.44}$$

Аналогичные соотношения можно получить и для $j=2,\ldots,m$. Поэтому можно указать такие $\Delta>1$, C_{16} и γ, что

$$\varphi_j=(\Delta\tau)\leqslant\exp(C_{16}\tau)+\frac{1}{\gamma}\prod_{j=1}^{n}\varphi_j^2(\tau)\,e^{\tau}\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.45}$$

Если положить

$$\omega(\tau)=\sup_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\0<\tau'<\tau}}\left\{\varphi_j(\tau')\exp(C_{16}\tau'),\ 1+\frac{e^{\tau'}}{\gamma}\right\}, \tag{2.46}$$

то из (2.45) следует

$$\omega(\Delta\tau)\leqslant[\omega(\tau)]^{(2n+1)\Delta}. \tag{2.47}$$

Поступая здесь так же как и при выводе леммы 3, мы из (2.47) получим $\omega(\tau)=O(\exp(\tau^A))$, где $A\geqslant 1$ — некоторая постоянная.

Теорема 3, а следовательно и теорема 4, доказаны.

Замечание. Если компоненты вектора Ξ одинаково распределены, то условие теоремы 3 можно ослабить. В качестве статистик $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ можно брать квазиполиномиальные допустимые лишь по одной координате статистики. На одну из статистик надо наложить вместо линейности только следующее ограничение:

если статистики $S_1(\Xi)$ и $S_2(\Xi)$ допустимы по X_1, то

$$S_2(\Xi) = (X_1 + s(\Xi))^{2e},$$

где

$$|s(\Xi)| \leqslant |X_2 + \ldots + X_n|.$$

§ 3

Доказанная в предыдущем параграфе теорема 4 указывает весьма простой путь выяснения некоторых случаев, когда независимость статистик квазиполиномиального типа имеет место только для нормально распределенных векторов Ξ.

В условиях теоремы 4 характеристические функции компонент вектора Ξ суть целые функции конечного порядка. Допустим, что

$$f_j(t) = \mathbf{E}\{\exp(itX_j)\} \neq 0 \tag{3.1}$$

при всех комплексных t. Согласно теореме Адамара о представлении целых функций (см. например [18], стр. 284)

$$f_j(t) = \exp\{P_j(t)\}, \tag{3.2}$$

где $P_j(t)$ — полином. Но, применив здесь известную лемму Марцинкевича (см. [15]), мы немедленно получим: компонента X_j вектора Ξ распределена нормально.

Таким образом имеет место следующая

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *те компоненты вектора* Ξ, *характеристические функции которых не имеют нулей, распределены нормально.*

Теорема 5 показывает, что для нахождения случаев, когда независимость статистик рассматриваемого типа приводит к нормальности вектора Ξ, достаточно установить, что из независимости вытекает необращаемость в нуль характеристических функций. Заметим, что в упоминающихся уже работах [1, 12, 17] дело обстоит именно таким образом. Однако, в общем случае, как показывают примеры, нет оснований полагать, что из независимости статистик квазиполиномиального или даже полиномиального типа вытекает необращаемость в нуль характеристических функций компонент вектора Ξ. Укажем такие примеры.

Пример 1*. Пусть все компоненты вектора Ξ имеют одно и то же дискретное распределение

$$\mathbf{P}\{X_j = a_k\} = p_k > 0;\ \sum_{k=1}^{N} p_k = 1;\ N > 1. \tag{3.3}$$

* Этот пример был указан автору Ю. В. Линником.

Пусть $\{b_1, b_2, \ldots, b_{N_1}\}$ — множество всех значений, которые могут принимать

$$X_i - X_j \quad (i;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Построим полиномиальную статистику

$$Q(\Xi) = \prod_{k=1}^{N_1} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_i - X_j - b_k). \tag{3.4}$$

Статистика $Q(\Xi)$ не зависит очевидно от $\bar{X}$.
Но

$$f_j(t) = \mathrm{E}\{\exp(itX_j)\} = \sum_{k=1}^{N} p_k e^{ita_k}. \tag{3.5}$$

Эта функция имеет нули на комплексной плоскости. Заметим еще, что $Q(\Xi)$ и $\bar{X}$ будут независимы, когда компоненты вектора Ξ имеют одинаковые нормальные респределения.

Пример 2. Пусть $\Xi = (X_1,\ X_2)$ — случайный вектор с независимыми одинаково распределенными по нормальному закону со средним нуль и дисперсией единица компонентами.

Если взять две статистики

$$\begin{aligned} S_1 &= X_1 + X_2, \\ S_2 &= X_1 - X_2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

то они независимы (см. например [10], стр. 415).

Совершим преобразование $X_j = Y_j^3,\ j = 1,\ 2.$

Если рассмотреть случайный вектор $\Xi' = (Y_1,\ Y_2)$, то для него статистики

$$\begin{aligned} S_1' &= Y_1^3 + Y_2^3, \\ S_2' &= Y_1^3 - Y_2^3 \end{aligned}$$

независимы, но характеристические функции компонент

$$\mathrm{E}\{\exp(itY_j)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity - \frac{y^6}{2}} y^2 dy$$

имеют бесчисленное множество нулей (см. [16]).

В качестве третьего примера можно было бы указать работу Р. Г. Лага [11], в которой изучаются распределения, для которых существуют независимые квадратичная форма и выборочное среднее $\bar{X}$. Среди указанных там распределений имеются и такие, характеристические функции которых имеют нули.

Укажем некоторые случаи, когда независимость полиномиальной статистики и линейной формы обеспечивает отсутствие нулей у характеристических функций распределений компонент вектора Ξ.

Этот вопрос при условии одинаковой распределенности компонент вектора Ξ трактовался Ю. В. Линником в статье [12]. В этой статье вводится понятие неособенности полиномиальной статистики, которое и позволяет сформулировать условия, обеспечивающие отсутствие нулей у характеристических функций. Результаты, полученные в [12], можно, с некоторыми видоизменениями, перенести на случай разнораспределенных компонент.

Определение. В полиномиальной статистике $P(\Xi)$ выделим однородный многочлен старшей степени $P_0(\Xi)$. В каждом одночлене этого многочлена заменим $X_j^{k_j}$ на $m_j(m_j-1)\ldots.(m_j-k_j+1)$, в результате чего у нас получится полином от $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, который обозначим $\pi(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Статистику $P(\Xi)$ будем называть неособенной, если

$$\pi(m_1, m_2, \ldots, m_n) \neq 0$$

при всех таких наборах целых неотрицательных чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, что $m_1+m_2+\ldots+m_n>1$.

Имеет место

Лемма 4. *Пусть $\Xi=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами. Если допустимая полиномиальная статистика $P(\Xi)$ и $\overline{X}$ независимы, то для того, чтобы в некоторой точке комплексной плоскости характеристическая функция компоненты X_j имела нуль порядка m_j $(j=1, 2, \ldots, n)$, необходимо, чтобы*

$$\pi(m_1, m_2, \ldots, m_n)=0.$$

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству леммы в работе [12], поэтому мы не будем останавливаться на нем.

Из леммы 4 вытекает, что если статистика $P(\Xi)$, кроме допустимости, еще и неособенна, то из независимости ее и $X_1+X_2+\ldots+X_n$ должно следовать, что характеристические функции компонент вектора Ξ могут иметь лишь нули кратностей $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, где одно из m_j единица, а все остальные нули. Используя это простое замечание, можно сформулировать условия, выполнение которых обеспечит необращаемость в нуль характеристических функций компонент вектора Ξ и следовательно нормальность этих компонент.

При этом получается

Теорема 6. *Пусть $\Xi=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — случайный вектор с независимыми компонентами. Если неособенная, допустимая по всем аргументам полиномиальная статистика $P(\Xi)$ и $X_1+X_2+\ldots+X_n$ независимы, то для нормальности вектора Ξ достаточно выполнения одного из двух следующих условий:*

А) *компоненты вектора Ξ могут быть разбиты на пары одинаково распределенных;*

В) *каждая из компонент вектора Ξ может быть представлена в виде $X_j=Z_j'+Z_j''$, где Z_j' и Z_j'' независимы и одинаково распределены.*

Поступила в редакцию
19.1.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Basu, R. G. Laha, On some characterization of the normal distribution, Sankhya, **13**, 4 (1954); Addenda, Sankhya, **14**, 1—2 (1954).
[2] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГТТИ, 1954.
[3] G. Darmois, Analyse générale des liaisons stochastiques; étude particulière de l'analyse factorielle lineaire, Rev. Inst. Internat. Stat., **21**, (1953), 2.
[4] А. А. Зингер, О независимых выборках из нормальной совокупности, Успехи матем. наук, **6**, 5 (1951), 172.
[5] А. А. Зингер, О независимости полиномиальных и квазиполиномиальных статистик, ДАН СССР, **110**, № 3 (1956), 319.
[6] А. А. Зингер, Ю. В. Линник, Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера и его применении, Вестник ЛГУ, № 11 (1955), 51.
[7] А. А. Зингер, Ю. В. Линник, Об одном классе дифференциальных уравнений и его применении к некоторым вопросам теории регрессии, Вестник ЛГУ, № 7 (1957), 121.
[8] T. Kawata, H. Sakamoto, On the characterization of the normal population by the independence of the sample mean and the sample variance, Journ. Math. Soc. Japan, **1**, (1949).
[9] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИИЛ, 1947.
[10] Г. Крамер, Математические методы статистики, ИИЛ, 1948.
[11] Р. Г. Лага, О стохастической независимости однородной квадратичой статистики и среднего, Вестник ЛГУ, № 1 (1956).
[12] Ю. В. Линник, О независимости полиномиальных статистик в связи с аналитической теорией дифференциальных уравнений, Вестник ЛГУ, № 1 (1956).
[13] E. Lukacs, A characterization of the normal distribution, Ann. Math. Stat., **13**, (1942), 91.
[14] E. Lukacs, Characterixation of populations by properties of suitable statistics, Proc, of the III Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., **2** (1956), 195.
[15] J. Marcinkiewicz, Sur une propriété de la loi de Gauss, Math. Zeitschrift, **44**. 4—5 (1938).
[16] G. Polya, On the zeros of an integral function, represented by Fourier's integral, Messenger of Math., **52** (1953), 195.
[17] В. П. Скитович, Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения, Известия АН СССР, сер. матем., **18** (1954), 185.
[18] Е. Титчмарш, Теория функций, ГТТИ, 1951.
[19] П. Халмош, Теория меры, ИИЛ, 1953.
[20] K. C. Chanda, On some moment properties when two polynomials have independent distributions, Calcutta Stat. Assoc. Bull. (1955), 40.

INDEPENDENCE OF QUASI-POLYNOMINAL STATISTICS AND ANALYTICAL PROPERTIES OF DISTRIBUTIONS

A. A. ZINGER (*LENINGRAD*)

(Summary)

The analytical properties of distributions of a random vector with independent components admitting two suitable independent statistics are studied. The results are used to characterize the normal distribution.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1958

СТРУКТУРА АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. С. МОНИН

В настоящем обзоре приводятся теоретические сведения и экспериментальные данные о статистических характеристиках турбулентных пульсаций скорости ветра и температуры в нижнем слое атмосферы. Эти сведения могут быть полезными при решении ряда проблем геофизики и техники, как тепло- и влагообмен и динамическое взаимодействие подстилающей поверхности с атмосферой, результирующая трансформация воздушных масс, микроклимат сельскохозяйственных культур, распространение примесей в воздухе, рассеяние звука и радиоволн на атмосферных неоднородностях, мерцание звезд и т. п.

Мы будем рассматривать лишь стационарный режим турбулентности в приземном слое воздуха над однородной подстилающей поверхностью. Компоненты скорости ветра u, v, w по осям декартовых координат x, y, z (z — вертикальная координата) и температуру воздуха T будем считать случайными функциями координат x, y, z и времени t.

Такой подход исходит еще от идей О. Рейнольдса, предложившего разбивать характеристики турбулентной среды на осредненные и пульсационные слагаемые и описывать пульсации статистически. Ряд статистических методов был предложен в работах А. А. Фридмана и Л. В. Келлера, а также Г. Тэйлора. Систематическое использование в теории турбулентности методов теории случайных функций, приведшее к конкретным результатам, осуществлено А. Н. Колмогоровым и его учениками.

§ 1. Турбулентные пульсации в фиксированной точке

1. 1. Определение средних значений и пульсаций. Измерения характеристик случайных функций u, v, w и T основываются на эргодической гипотезе, согласно которой вычисление математических ожиданий (т. е. осреднение по фазовому пространству) в случае стационарности случайных функций может быть с необходимой точностью заменено осреднением по достаточно большим интервалам времени. Однако случайные функции u, v, w и T, строго говоря, не являются стационарными (например, имеет место в среднем регулярный суточный ход) и, кроме того, существенную трудность создает известное явление «эволюции уровня» метеорологических полей: их средние по времени значения зависят от интервала осреднения (исключением является лишь вертикальная компонента скорости w, имеющая фиксированное среднее значение, равное нулю). Тем самым

разбиение значений той или иной случайной характеристики на осредненное и пульсационное слагаемые оказывается условным, зависящим от интервала осреднения.

Явление «эволюции уровня» объясняется тем, что спектр временных масштабов флюктуаций метеорологических величин весьма широк. Осреднение по времени относительно данного интервала θ отфильтровывает высокочастотные компоненты флюктуаций, периоды которых значительно меньше θ, но сохраняет низкочастотные компоненты с периодами больше θ. Среднее по времени значение будет относительно «устойчивым», если интервал осреднения θ превосходит временные масштабы «макроструктурных элементов» — турбулентных образований, содержащих основную долю энергии турбулентности *.

Опыт показывает, что при осреднении по интервалу времени порядка 10 мин. средние значения скорости ветра и температуры являются «устойчивыми»: их изменения во времени обуславливаются лишь суточным ходом и процессами синоптических масштабов. Кроме того, режим высокочастотных пульсаций на не слишком больших интервалах времени можно считать стационарным.

Таким образом, величины u, v, w и T можно считать стационарными (в указанном условном смысле) и однородными по горизонтали случайными функциями координат и времени. Иначе говоря, для значений этих величин на любом конечном множестве точек пространства — времени существуют совместные распределения вероятностей, инвариантные относительно горизонтальных сдвигов системы координат и сдвигов начала отсчета на оси времени, а также относительно отражений в вертикальной плоскости, проходящей через направление среднего ветра (которое при нашем условном подходе имеет определенное значение). Направив ось x направлению среднего ветра и обозначая средние значения черточкой над буквами и пульсации — штрихом, можем положить

$$u = \bar{u}(z) + u'; \; v = v'; \; w = w'; \; T = \bar{T}(z) + T'. \tag{1}$$

1.2. Теория подобия для турбулентного режима в приземном слое воздуха. Важными характеристиками турбулентности являются турбулентное напряжение трения τ и вертикальный турбулентный поток тепла q, определяемые формулами

$$\tau = -\rho\overline{u'w'}; \; q = c_p\rho\overline{w'T'}, \tag{2}$$

где c_p и ρ — удельная теплоемкость при постоянном давлении и плотность воздуха. Согласно уравнениям движения и притока тепла, в приземном слое воздуха толщиной в несколько десятков метров величины τ и q можно считать не зависящими от высоты [5]. Вместо этих величин нам будет удобнее использовать «скорость трения» $v_* = (\tau/\rho)^{1/2}$ и «поток температуры» $q/c_p\rho$.

В теории, предложенной А. М. Обуховым и А. С. Мониным [1] — [5],

* Понятие о макроструктурных элементах широко используется Бэтчелором [41], который называет их «вихрями, содержащими энергию» (energy containing eddies).

принимается, что развитый турбулентный режим (в масштабах, в которых действие молекулярной вязкости и теплопроводности уже несущественно) определяется тремя размерными параметрами — величинами v_* и $q/c_p\rho$ и параметром g/T_0 (g — ускорение силы тяжести, T_0 — средняя температура приземного слоя воздуха), характеризующим величину архимедовых сил и являющимся единственным размерным параметром, входящим в уравнения динамики для индивидуальных реализаций развитого турбулентного режима в приземном слое воздуха. Таким образом, изменения с высотой осредненных характеристик развитого турбулентного режима могут быть выражены через координату z и параметры v_*, $q/c_p\rho$ и g/T_0. Это предположение является обобщением на случай температурно-неоднородной среды гипотезы подобия, лежащей в основе известной теории логарифмического пограничного слоя.

Из параметров v_*, $\frac{q}{c_p\rho}$ и $\frac{g}{T_0}$ можно лишь единственным (с точностью до числовых множителей) образом составить масштабы длины L, температуры T_* и скорости V. Именно, V пропорционально v_*, а L и T_* даются формулами

$$L = -\frac{v_*^3}{\varkappa \frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho}}; \quad T_* = -\frac{1}{\varkappa v_*}\frac{q}{\alpha c_p\rho}; \tag{3}$$

где числовые множители $\varkappa$ (постоянная Кармана) и α (отношение коэффициентов обмена для теплоты и для количества движения) введены для удобства последующих выкладок.

Изложенная теория подобия пригодна для описания турбулентных образований различных масштабов, включая макроструктурные элементы (за исключением микромасштабов, в которых становится существенным действие молекулярной вязкости и теплопроводности).

1.3. Форма осредненных профилей скорости ветра и температуры. В предположении, что α является универсальной постоянной, для зависимости $\bar{u}$ и $\bar{T}$ от z и параметров v_*, $\frac{q}{c_p\rho}$ и $\frac{g}{T_0}$ с помощью соображений размерности получаются следующие формулы:

$$\bar{u}(z) = \frac{v_*}{\varkappa}\left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]$$

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z_0) + T_*\left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right], \tag{4}$$

где $f(\zeta)$ — некоторая универсальная функция, а z_0 — так называемая «высота шероховатости» — динамическая характеристика неровностей подстилающей поверхности. При этом возможны два качественно различных универсальных режима, соответствующих случаям устойчивой стратификации ($q<0$, $L>0$, $T_*>0$) и неустойчивой стратификации ($q>0$, $L<0$, $T_*<0$). Универсальная функция $f(\zeta)$ связана следующим соотношением с так называемым числом Ричардсона Ri:

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{T_0}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\Big/\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\alpha f'(\zeta)}. \tag{5}$$

Таким образом, показатели устойчивости ζ и Ri связаны функциональным соотношением. Функция $f(\zeta)$ обладает следующими свойствами [1] — [7]. При малых $|\zeta|$ (малые z или большие $|L|$, т. е. стратификация. близ-

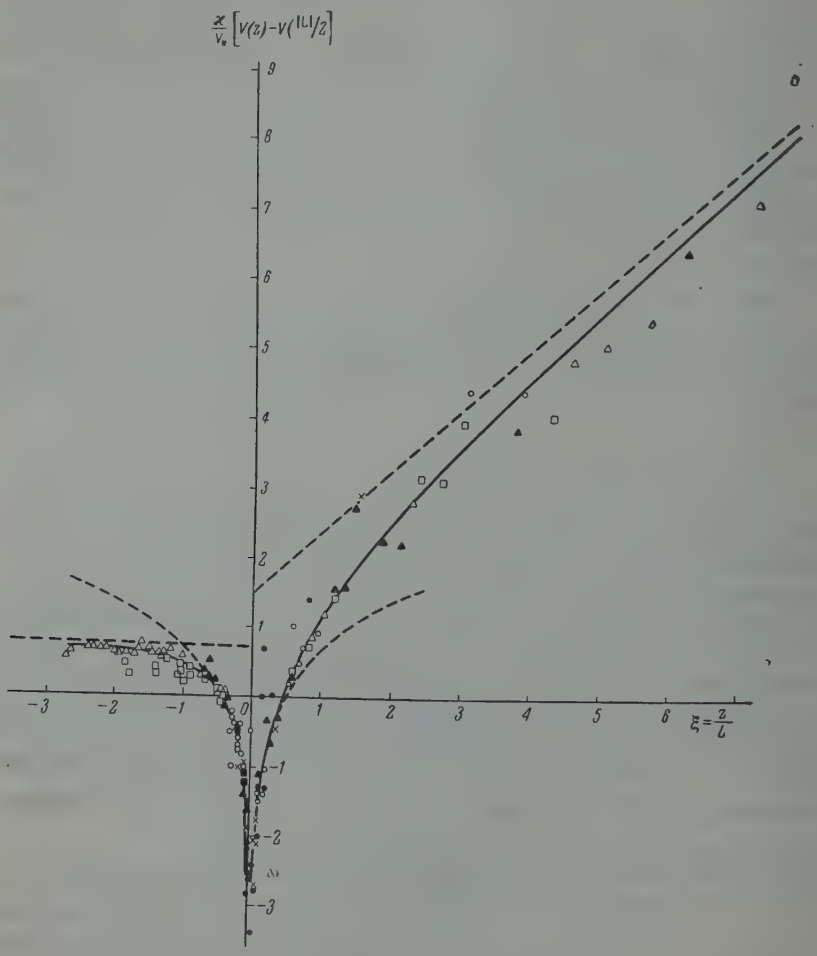

Рис. 1. Универсальная форма профиля ветра $f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ по А. С. Монину и А. М. Обухову [4]

кая к безразличной) $f(\zeta)\approx\ln|\zeta|+\beta\zeta$, где β — числовая постоянная, согласно экспериментальным данным, близкая к 0,6. При больших $\zeta>0$ (устойчивая стратификация) $f(\zeta)\sim\frac{\zeta}{\alpha R}+\text{const}$, где $R\,(<\text{Ri}_{\text{кр}})$ — предельное значение числа Ричардсона при сильных инверсиях температуры. При больших отрицательных ζ (сильная термическая неустойчивость) $f(\zeta)\sim$ $\sim C\zeta^{-\frac{1}{3}}+\text{const}$, где C — числовая постоянная, согласно экспериментальным

данным, близкая к единице. Универсальный характер функции $f(\zeta)$ и наличие у нее указанных свойств подтверждаются результатами измерений [4] — [5], приведенными на рис. 1. Согласно Пристли [8], при неустойчивой стратификации асимптотический режим фактически достигается при $|\zeta| > 0{,}03$ (или $\mathrm{Ri} < -0{,}03$).

1.4. Коэффициент турбулентности. В ряде проблем (например, диффузии примесей) представляет интерес коэффициент турбулентности k, определяемый из соотношения

$$\tau = \rho k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \tag{6}$$

С помощью формул (2) — (5) получается

$$k = \frac{\varkappa v_* L}{f'(\zeta)}. \tag{7}$$

При малых $|\zeta|$ будет $k \approx \varkappa v_* z$. При больших z в случае устойчивой стратификации $k \to \varkappa v_* L \alpha R = \mathrm{const}$, а в случае неустойчивой стратификации $k \sim \frac{3}{C}\left(\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_{p\rho}}\right)^{\frac{1}{3}} (\varkappa z)^{\frac{4}{3}}$. Коэффициент турбулентной диффузии для пассивных примесей может отличаться от k лишь числовым множителем порядка единицы.

1.5. Распределения вероятностей для пульсаций. Из пп°. 1.1—1.2 следует, что совместные распределения вероятностей для значений безразмерных пульсаций $\frac{u'}{v_*}$, $\frac{v'}{v_*}$, $\frac{w'}{v_*}$ и $\frac{T'}{|T_*|}$ в фиксированной точке пространства-времени могут зависеть лишь от безразмерной вертикальной координаты этой точки $\zeta = \frac{z}{L}$.

Очевидно, частное распределение для $\frac{v'}{v_*}$ должно быть симметричным; этого же можно ожидать от частного распределения для $\frac{u'}{v_*}$. Оба эти распределения, по-видимому, близки к гауссовским, как это имеет место, например, для турбулентности в трубах. Дикон [9] установил, что какого-либо систематического отличия коэффициентов асимметрии и эксцесса для u' от соответствующих характеристик гауссовского распределения не имеется. Вследствие гауссовости исчерпывающими характеристиками величин $\frac{u'}{v_*}$ и $\frac{v'}{v_*}$ будут их стандартные отклонения $\frac{\sigma_u}{v_*}$, $\frac{\sigma_v}{v_*}$, являющиеся универсальными функциями от ζ. Отношение этих функций $\frac{\sigma_v}{\sigma_u}$ характеризует горизонтальную анизотропность турбулентности, причем, поскольку она связана с чисто динамическими причинами (наличием среднего ветра), $\frac{\sigma_v}{\sigma_u}$ должно приближаться к единице с ростом неустойчивости, так как относительная роль пульсаций динамического происхождения при этом убывает. На

рис. 2а приведен эмпирический график зависимости $\frac{\sigma_u}{v_*}$ от Ri по данным измерений Свинбенка [10], полученным при помощи термоанемометра с относительно большой инерцией. Прямых экспериментальных данных о значениях $\frac{\sigma_v}{\sigma_u}$ еще не имеется.

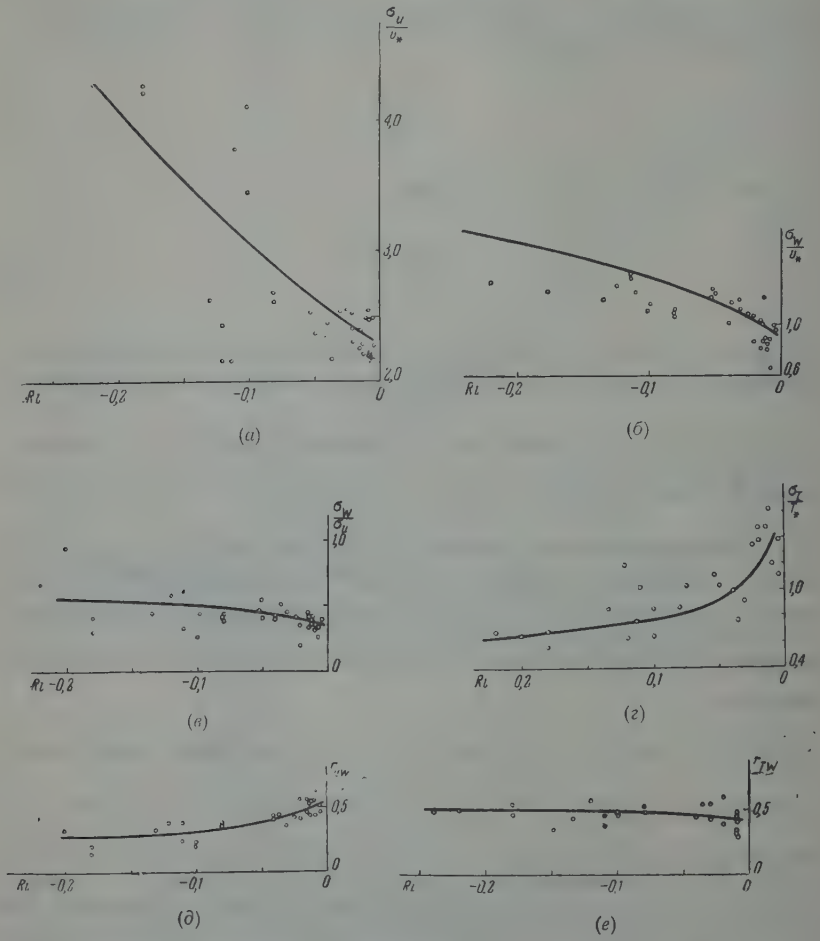

Рис. 2. Зависимость безразмерных характеристик турбулентности от числа Ричардсона по данным измерений Свинбенка [10]

(а) $\frac{\sigma_u}{v_*}$; (б) $\frac{\sigma_w}{v_*}$; (в) $\frac{\sigma_{w'}}{\sigma_u}$; (г) $\frac{\sigma_T}{|T_*|}$; (д) r_{uw}; (е) r_{wT}

На рис. 3 приводятся примеры распределений для w при неустойчивой, безразличной и устойчивой стратификации по данным А. В. Перепелкиной [11]. Важнейшей характеристикой этих распределений служит стандартное отклонение $\frac{\sigma_w}{v_*}$, являющееся функцией от ζ. Эта функция пока что измерена [9] — [10] лишь на небольшом интервале значений Ri (рис. 2б),

однако некоторые сведения можно извлечь из данных [11] о зависимости стандартного отклонения σ_φ угла наклона φ вектора ветра к горизонту от показателя устойчивости $B = \frac{\Delta\overline{T}}{\overline{u}^2}$ ($\Delta\overline{T}$ — разность температур на высотах

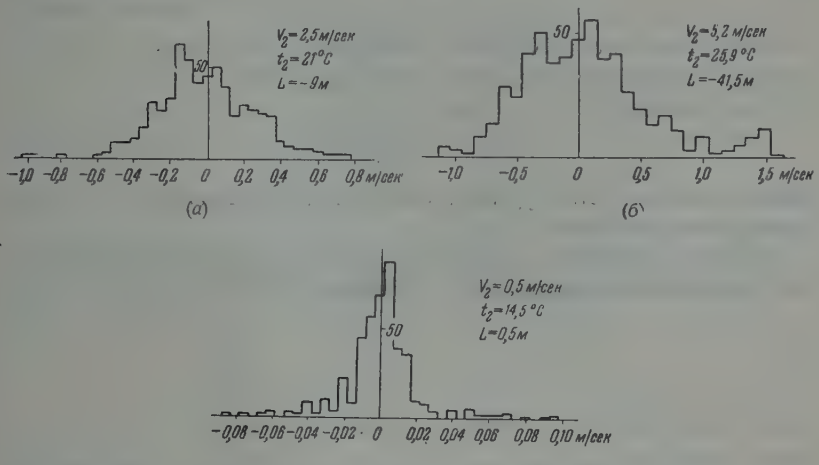

Рис. 3. Примеры распределений вероятностей для w по данным А. В. Перепелкиной [11] при (*а*) неустойчивой, (*б*) безразличной и (*в*) устойчивой стратификации

1 *м* и 4 *м*, $\overline{u}$ — скорость ветра на высоте 2 *м*), приведенных на рис. 4. Согласно [11], значения σ_φ меняются при инверсиях от 0°,7 до 4°, а при неустойчивой стратификации — от 4° до 8°. Для грубых оценок σ_w (без учета влияния стратификации) в [11] рекомендуются следующие эмпирические формулы:

$$\text{на высоте 1,7 } м\text{: } \sigma_w = 0{,}86\, v_* = 0{,}092\, \overline{u}$$
$$\text{на высоте 1,5 } м\text{: } \sigma_w = 0{,}82\, v_* = 0{,}068\, \overline{u},$$

Эмпирические данные [10] о функции $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}$, характеризующей вертикальную анизотропность турбулентности, приведены на рис. 2*в*. А. Р. Константинов [12] отмечает, что отношение $|\overline{w'}|/|u'|$ в приземном слое воздуха растет с высотой, приближаясь к единице (так как при удалении от поверхности Земли ее ограничивающее влияние на вертикальные пульсации ослабевает).

Асимметрия распределения вероятностей для w', по-видимому, положительная, по крайней мере, при неустойчивой стратификации, когда восходящие движения нагретого воздуха преимущественно происходят в форме интенсивных, но узких струек, а нисходящие движения охлажденного воздуха — в форме медленного оседания на относительно больших площадях. Можно ожидать, что с ростом неустойчивости асимметрия распределения для w' должна увеличиваться. Дикон [9] получил по данным [10] следующие значения коэффициента асимметрии для w' на высоте $z = 1{,}5$:

Ri	−0,01	−0,08	−0,09	−0,13	−0,18	−0,22
$\overline{w'^3}/\sigma_w^3$	0,24–0,44	0,24–0,39	0,26	0,57	0,39	0,81

Полная кинетическая энергия турбулентности (в единице массы) может быть охарактеризована универсальной функцией

$$\mathcal{E}(\zeta) = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2}{2v_*^2}. \tag{8}$$

Прямых измерений этой функции еще не имеется. Некоторые косвенные данные приводятся ниже.

На рис. 5 приводятся примеры [11] распределений вероятностей для T' при неустойчивой и устойчивой стратификации. Важнейшая характеристика

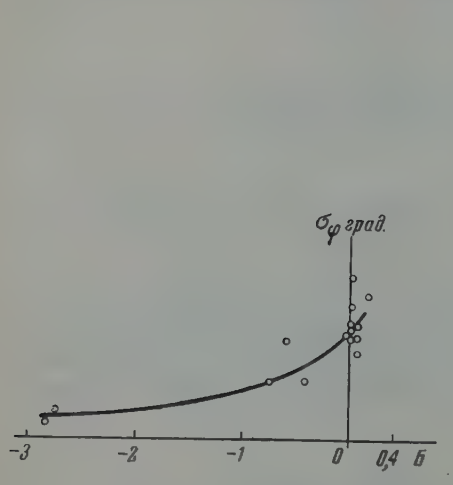

Рис. 4

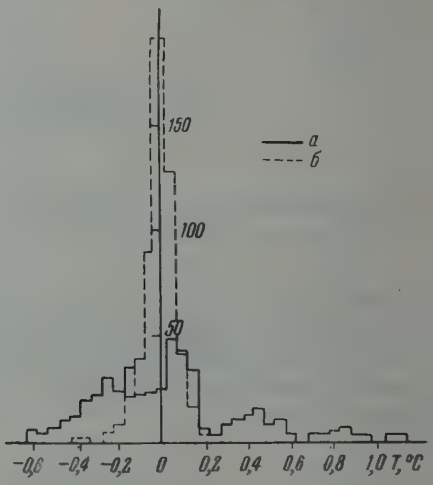

Рис. 5

Рис. 4. Стандартное отклонение угла наклона вектора ветра к горизонту при различных значениях параметра устойчивости Б по А. В. Перепелкиной [11]

Рис. 5. Примеры распределений вероятностей для T' по данным А. В. Перепелкиной [11] при (*а*) неустойчивой и (*б*) устойчивой стратификации

этих распределений — стандартное отклонение $\frac{\sigma_T}{|T_*|}$ — является функцией от ζ (или от Ri). Некоторые сведения [10] об этой функции приведены на рис. 2*г*. В [11] рассматривалась более грубая характеристика $\frac{\sigma_T}{|\Delta T|}$, и было установлено, что с ростом устойчивости эта величина убывает (рис. 6). В силу сказанного выше об асимметрии распределения для w' и вследствие корреляции между w' и T' можно ожидать, что распределение для T' также асимметрично, и при неустойчивой стратификации асимметрия положительна. Это подтверждается данными [11], однако прямых сведений о зависимости коэффициента асимметрии $\overline{T'^3}/\sigma_T^3$ от ζ еще не имеется.

Из смешанных вторых моментов величин u', v', w' и T' отличными от нуля могут быть лишь моменты (2). Соответствующие коэффициенты корреляции r_{uw} и r_{wT} являются универсальными функциями от ζ (или от Ri); некоторые эмпирические данные [10] об этих функциях приведены на рис. 2 *д*, *е*. Из смешанных третьих моментов наибольший интерес представляет величина

$$D(\zeta) = \frac{1}{2v_*^3}\overline{w'(u'^2 + v'^2 + w'^2)}, \tag{9}$$

соответствующая z-компоненте турбулентного потока турбулентной энергии. Эта величина входит в уравнение баланса турбулентной энергии [13]:

$$\varepsilon = -\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{g}{T_0}\overline{w'T'} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{w'\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2}}, \tag{10}$$

где ε — скорость диссипации турбулентной энергии в теплоту (в единице массы). С помощью (2) — (4) и (9) это уравнение приводится к виду

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\varkappa L}[f'(\zeta) - 1 - \varkappa D'(\zeta)], \tag{11}$$

так что для оценки роли вертикальной диффузии турбулентной энергии следует сравнивать $D'(\zeta)$ и $\frac{1}{\varkappa}f'(\zeta)$. Косвенные сведения о диффузии турбулентной энергии можно извлечь из данных об изменениях турбулентной энергии с высотой. Дикон [9] приводит следующую таблицу для отношения s значений величины $\sigma_u^2 + \sigma_w^2$ на высотах 28 *м* и 1,75 *м* при различных Ri:

$$+0{,}01 > \mathrm{Ri} > -0{,}02\text{: } s = 0{,}83$$

$$-0{,}02 > \mathrm{Ri} > -0{,}05\text{: } s = 1{,}09$$

$$-0{,}09 > \mathrm{Ri} > -0{,}18\text{: } s = 1{,}35$$

Таким образом, при слабой неустойчивости вертикальный градиент турбулентной энергии мал, и диффузией турбулентной энергии можно пренебрегать.

1.6. «Замороженная турбулентность». Тэйлор [14] показал, что по флюктуациям метеорологической величины в фиксированной точке потока можно приближенно судить о структуре пространственного распределения этой величины вдоль прямой $\mathscr{L}$, проходящей через данную точку параллельно направлению среднего ветра. Именно, флюктуации в данной точке можно приближенно интерпретировать, как результат переноса через эту точку со скоростью среднего ветра и без искажений совокупности турбулентных вихрей, расположенных вдоль $\mathscr{L}$ вверх по течению. При этом компоненте флюктуаций с частотой λ $\left(\text{и периодом } \theta = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ соответствует синусоидальная компонента поля данной метеорологической величины вдоль $\mathscr{L}$ с длиной волны $l = u\theta = \frac{2\pi u}{\lambda}$ $\left(\text{и волновым числом } p = \frac{2\pi}{l} = \frac{\lambda}{u}\right)$.

Конечно, не следует понимать буквально, что поле турбулентности переносится средним ветром как целое, без каких-либо искажений («замороженная турбулентность»). На самом деле, неоднородности поля эволюционируют, а их перемещение определяется не только средним ветром, но и пульсациями скорости. Однако при достаточно малом «уровне турбулентности» $\frac{\sigma_u}{u}$ ошибки от использования представления о «замороженной турбулентности» будут невелики, и притом тем меньше, чем меньше масштабы периоды θ и длины волн l) рассматриваемых компонент турбулентности.

§ 2. Разности метеорологических величин в парах точек пространства — времени

2.1. Пространственные и временные разности. Мы будем рассматривать разности значений скорости ветра $\mathbf{U}$ и температуры T в двух точках потока в фиксированный момент времени

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t);\ \Delta T = T(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) - T(\mathbf{x}, t) \qquad (12)$$

или в два момента времени в фиксированной точке потока

$$\Delta_\theta\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t+\theta) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t);\ \Delta_\theta T = T(\mathbf{x}, t+\theta) - T(\mathbf{x}, t). \qquad (13)$$

Очевидно, при рассмотрении таких разностей трудности, связанные с «эволюцией уровня» метеорологических полей, отпадают.

Согласно теории подобия п.° 1.2, при любых значениях r или θ вплоть до масштабов макроструктурных элементов (но исключая микромасштабы, в которых становится существенным действие молекулярной вязкости и теплопроводности) совместное распределение вероятностей для $\frac{\Delta\mathbf{u}}{v_*}$ и $\frac{\Delta T}{|T_*|}$ зависит лишь от параметров ζ и $\frac{\mathbf{r}}{z}$, а совместное распределение вероятностей для $\frac{\Delta_\theta\mathbf{u}}{v_*}$ и $\frac{\Delta_\theta T}{|T_*|}$ зависит лишь от параметров ζ и $\frac{v_*\theta}{z}$. В частности, средние квадраты разностей (12) — (13) (так называемые пространственные и временные структурные функции) имеют вид

$$\overline{(\Delta u_i)^2} = v_*^2\varphi_i\left(\zeta, \frac{\mathbf{r}}{z}\right);\ \overline{(\Delta T)^2} = T_*^2\varphi_T\left(\zeta, \frac{\mathbf{r}}{z}\right);$$

$$\overline{(\Delta_\theta u_i)^2} = v_*^2\psi_i\left(\zeta, \frac{v_*\theta}{z}\right);\ \overline{(\Delta_\theta T)^2} = T_*^2\psi_T\left(\zeta, \frac{v_*\theta}{z}\right), \qquad (14)$$

где Δu_i, $\Delta_\theta u_i$ — компоненты разностей $\Delta\mathbf{u}$, $\Delta_\theta\mathbf{u}$ в какой-либо декартовой системе координат.

2.2. Локально-изотропная турбулентность. Изложенные в п.° 2.1 выводы, вытекающие из теории подобия п.° 1.2, могут быть существенно детализированы для значений r или θ, малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов. Для этого удобно рассматривать разности метеорологических величин в парах точек пространства — времени, вводя в окрестности одной из этих точек $M_1(\mathbf{x}_1, t_1)$ относительную систему от-

счета $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1 - \theta\mathbf{u}_1$, $\theta = t - t_1$, где $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(M_1)$. Пространственное начало отсчета $\mathbf{y} = 0$ этой системы координат находится в подвижной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + (t - t_1)\mathbf{u}_1$, которую при малых $t - t_1$ можно считать связанной с жидкой частицей, находившейся в момент t_1 в точке $\mathbf{x}_1$.

Новыми координатами точки M_1 будут $\mathbf{y} = \theta = 0$. Можно считать, что на любом конечном множестве точек $M_i(\mathbf{y}_i, \theta_i)$ для значений разностей $\mathbf{u}(M_i) - \mathbf{u}(M_1)$, $T(M_i) - T(M_1)$ существуют совместные условные распределения вероятностей при условии, что значение $\mathbf{u}_1$ фиксировано. При значениях $\mathbf{y}_i$, θ_i, малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов, указанные разности определяются лишь мелкомасштабными компонентами турбулентности.

При очень больших числах Рейнольдса, типичных для атмосферы, доминирующими в динамике турбулентности, являются силы инерции, действие которых приводит к перераспределению энергии по спектру турбулентности — передаче энергии от крупномасштабных турбулентных элементов к мелкомасштабным. При стационарном режиме скорость передачи энергии по спектру равна скорости диссипации турбулентной энергии ε. Вследствие хаотичности передачи энергии от крупномасштабных компонент к мелкомасштабным режим последних становится независимым от характера макроструктурных элементов и определяется лишь внутренними факторами.

А. Н. Колмогоров [15] сформулировал ряд гипотез о свойствах режима мелкомасштабных пульсаций в терминах условных распределений вероятностей для разностей $\mathbf{u}(M_i) - \mathbf{u}(M_1)$, $T(M_i) - T(M_1)$ (при условии, что значение $\mathbf{u}_1$ фиксировано) при значениях y_i, θ_i, малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов. Первая из этих гипотез (гипотеза о локальной изотропности) утверждает, что указанные распределения вероятностей не зависят явно от $\mathbf{x}_1$, t_1, $\mathbf{u}_1$ и инвариантны относительно вращений и зеркальных отражений системы координат $\mathbf{y}$. Следовательно, эти распределения могут зависеть явно лишь от метрических характеристик конфигурации точек $\mathbf{y}_i$ и от значений θ_i.

Согласно второй гипотезе Колмогорова, режим мелкомасштабных пульсаций скорости определяется лишь действием сил инерции (характеризуемым скоростью передачи энергии по спектру ε) и сил вязкости, в соответствии с чем единственными параметрами, от которых зависят распределения вероятностей для разностей скоростей, являются кинематическая вязкость жидкости ν и скорость диссипации энергии ε. А. М. Обухов [16] дополнительно предположил, что распределения вероятностей для разностей температур зависят, кроме ν и ε, также от молекулярной температуропроводности жидкости χ и от меры неоднородности температурного поля $N = \chi\,|\overline{\operatorname{grad} T'}|^2$.

Из параметров ν и ε могут быть однозначно (с точностью до числового множителя) составлены масштаб длины $\eta = \nu^{\frac{3}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$, масштаб скорости $(\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$ и масштаб времени $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$. Величину η (внутренний масштаб турбулентности) можно интерпретировать, как масштаб наименьших турбулентных вихрей, существованию которых не препятствует молекулярная вязкость. Действие молекулярных вязкости и теплопроводности существенно лишь для

турбулентных элементов наименьших масштабов, и при $y_i \gg \eta$, $\theta_i \gg (\nu/\varepsilon)^{1/2}$ зависимость распределений вероятностей для разностей метеорологических величин от ν и χ становится несущественной. Это утверждение составляет третью гипотезу Колмогорова.

Таким образом, может существовать интервал масштабов длины и времени, больших по сравнению с η и $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ соответственно, но малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов, в котором распределения вероятностей для разностей метеорологических величин зависят лишь от параметров ε и N. Этот интервал называется инерционным, так как режим пульсаций скорости в нем определяется лишь действием сил инерции.

2.3. Параметры турбулентного режима в инерционном интервале. В реальной атмосфере параметры ε и N, вообще говоря, меняются от точки к точке и с течением времени. При стационарном режиме в горизонтально-однородном приземном слое воздуха они зависят лишь от высоты z. При этом ε определяется из уравнения баланса турбулентной энергии (10) или (11), а для определения N В. И. Татарским [17] получено аналогичное уравнение

$$N = \alpha k \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial z} - \overline{w'T'^2}\right), \tag{15}$$

в котором, по-видимому, вторым слагаемым в правой части можно пренебречь. Пренебрегая также последним слагаемым в формуле (11) и пользуясь в (15) формулами (4) и (7), получаем

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\varkappa L}[f'(\zeta) - 1], \tag{16}$$

$$N = \frac{\alpha \varkappa v_* T_*^2}{L} f'(\zeta).$$

В частности, при состояниях, близких к безразличной стратификации (малые $|\zeta|$), будет

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\varkappa z}[1 - (1 - \beta)\zeta],$$

$$N = \frac{\alpha \varkappa v_* T_*^2}{z}(1 + \beta\zeta). \tag{17}$$

Гипотезы п.° 2.2 формулировались для расстояний, малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов. В приземном слое атмосферы вертикальный масштаб макроструктурных элементов сравним с высотой z. На расстояниях, малых по сравнению с z, величины ε и N меняются мало, и при определении формы распределений вероятностей для разностей $\mathbf{u}(M_i) - \mathbf{u}(M_1)$, $T(M_i) - T(M_1)$ можно полагать $\varepsilon = \varepsilon(z_1)$, $N = N(z_1)$. Таким образом, указанные распределения оказываются зависящими от z_1, но не явно, а через посредство параметров ε и N.

2.4. Распределения вероятностей для пространственных разностей. Рассматривая разности (12), согласно п.° 2.2 можно утверждать,

что при значениях r много меньше масштабов макроструктурных элементов безразмерные величины $\frac{\Delta \mathbf{u}}{(\nu\varepsilon)^{1/4}}$, $\frac{\Delta T}{(N^2\nu\varepsilon^{-1})^{1/4}}$ являются изотропными случайными функциями безразмерного векторного аргумента $\frac{\mathbf{r}}{\eta}$, так что все характеристики распределений вероятностей для этих случайных функций являются универсальными (при фиксированном значении числа Прандтля χ/ν) функциями от $\frac{\mathbf{r}}{\eta}$.

При значениях r из инерционного интервала величина $\frac{\Delta \mathbf{u}}{(\varepsilon r)^{1/3}}$ является изотропной случайной функцией от направления вектора $\mathbf{r}$ (дополнительные ограничения на которую налагает несжимаемость потока), а величина $\frac{\Delta T}{N^{1/2}\varepsilon^{-1/6}r^{1/3}}$ является случайной величиной, не зависящей от $\mathbf{r}$.

2.5. Пространственные разности скорости ветра. Наряду с общей системой декартовых координат, в которой компоненты векторов $\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{u}$ мы обозначаем r_i и Δu_i, будем пользоваться специальной системой координат, ось абсцисс которой направлена вдоль вектора $\mathbf{r}$ так, что $r_1 = r$, $r_2 = r_3 = 0$. Компоненты вектора $\Delta\mathbf{u}$ в специальной системе обозначим $\Delta\mathbf{u}_1 = \Delta u_l$, $\Delta u_2 = \Delta u_n$, $\Delta u_3 = \Delta u_p$. Вследствие изотропности случайные величины Δu_n и Δu_p являются одинаково распределенными.

Математические ожидания величин Δu_l, Δu_n, Δu_p равны нулю, а их вторые, третьи и четвертые моменты вследствие изотропности имеют следующий общий вид [18]:

$$\overline{\Delta u_i \Delta u_j} = D_{ij}(\mathbf{r}) = [D_{ll}(r) - D_{nn}(r)]\frac{r_i r_j}{r^2} + D_{nn}(r)\delta_{ij}, \tag{18}$$

$$\overline{\Delta u_i \Delta u_j \Delta u_k} = D_{ijk}(\mathbf{r}) = D_{lnn}(r)\left(\frac{r_i}{r}\delta_{jk} + \frac{r_j}{r}\delta_{ik} + \frac{r_k}{r}\delta_{ij}\right) +$$

$$+ [D_{lll}(r) - 3D_{lnn}(r)]\frac{r_i r_j r_k}{r^3}, \tag{19}$$

$$\overline{\Delta u_i \Delta u_j \Delta u_k \Delta u_m} = D_{ijkm}(r) = \frac{1}{3}D_{nnnn}(r)(\delta_{ij}\delta_{km} + \delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}) +$$

$$+ [D_{llnn}(r) - \frac{1}{3}D_{nnnn}(r)]\left(\delta_{ij}\frac{r_k r_m}{r^2} + \delta_{ik}\frac{r_j r_m}{r^2} + \delta_{im}\frac{r_j r_k}{r^2} + \delta_{jk}\frac{r_i r_m}{r^2} + \delta_{jm}\frac{r_i r_k}{r^2} +\right.$$

$$\left. + \delta_{km}\frac{r_i r_j}{r^2}\right) + [D_{llll}(r) - 6D_{llnn}(r) + D_{nnnn}(r)]\frac{r_i r_j r_k r_m}{r^4}. \tag{20}$$

Таким образом, из вторых моментов отличны от нуля лишь D_{ll} и $D_{nn} = D_{pp}$ (так называемая продольная и поперечная структурные функции поля скорости), из третьих моментов — лишь D_{lll} и $D_{lnn} = D_{lpp}$, из четвертых — лишь D_{llll}, $D_{llnn} = D_{llpp}$ и $D_{nnnn} = D_{pppp} = 3D_{nnpp}$.

Вследствие несжимаемости потока

$$D_{nn} = D_{ll} + \frac{r}{2}\frac{\partial D_{ll}}{\partial r};\quad D_{lnn} = \frac{1}{6}\left(D_{lll} + r\frac{\partial D_{lll}}{\partial r}\right). \tag{21}$$

Кроме того, А. Н. Колмогоровым [19] получено следующее динамическое уравнение для локально-изотропной турбулентности:

$$D_{lll}(r) - 6\nu \frac{\partial D_{ll}(r)}{\partial r} = -\frac{4}{5}\varepsilon r. \tag{22}$$

Из (18)—(20) следует, что случайные величины Δu_l, Δu_n, Δu_p некоррелированы, но не независимы (квадраты $(\Delta u_n)^2$ и $(\Delta u_p)^2$ коррелируют с Δu_l). Частные распределения для Δu_n и Δu_p симметричны, но распределение для Δu_l обладает (по крайней мере, в инерционном интервале) отрицательной асимметрией. Действительно, в инерционном интервале уравнение (22) принимает вид $D_{lll} = -\frac{4}{5}\varepsilon r < 0$. Коэффициент асимметрии для Δu_l

$$S = D_{lll} D_{ll}^{-3/2} \tag{23}$$

является функцией $\frac{r}{\eta}$ и при $r \gg \eta$ стремится к отрицательной постоянной. Согласно измерениям Таунсенда [20] в аэродинамической трубе, подтвердившим ряд выводов теории локально-изотропной турбулентности, значение S в инерционном интервале близко к $-0{,}4$. Отрицательный знак S наглядно объясняется следующим образом. Передача энергии от крупномасштабных пульсаций к мелкомасштабным возможна, лишь если конвергенция продольной скорости ($\Delta u_l < 0$) преобладает над дивергенцией ($\Delta u_l > 0$), так что отрицательные Δu_l должны быть больше положительных. Но так как $\overline{\Delta u_l} = 0$, отрицательные Δu_l должны быть реже положительных. Но это и означает отрицательную асимметрию. Таким образом, на прямой $\mathscr{L}$, параллельной среднему ветру, в среднем имеется чередование коротких интервалов интенсивной конвергенции и длинных интервалов слабой дивергенции продольной компоненты скорости. Представление о «замороженной турбулентности» показывает, что короткие интервалы нарастания силы ветра в фиксированной точке («порывы») должны чередоваться с длинными интервалами спада силы ветра.

Вследствие изотропности все нечетные моменты двумерного распределения для Δu_n и Δu_p равны нулю, а из четных отличны от нуля лишь моменты вида

$$\overline{(\Delta u_n)^{2M}(\Delta u_p)^{2N-2M}} = \frac{(2M-1)!!\,(2N-2M-1)!!}{(2N-1)!!}\,\overline{(\Delta u_n)^{2N}}, \tag{24}$$

откуда следует, что или Δu_n и Δu_p не независимы, или их частные распределения нормальны.

Остановимся подробнее на структурных функциях (18). С помощью п.°2.2 и уравнений (21)—(22) получается:

при $r \ll \eta$: $\quad D_{ll}(r) = \frac{1}{15}\frac{\varepsilon}{\nu} r^2, \qquad D_{nn}(r) = \frac{2}{15}\frac{\varepsilon}{\nu} r^2$

в инерционном интервале: $\quad D_{ll}(r) = \frac{3}{4} A^2 (\varepsilon r)^{\frac{2}{3}}; \qquad D_{nn}(r) = A^2 (\varepsilon r)^{\frac{2}{3}}, \tag{25}$

где $A^2 = \frac{4}{3}\left(-\frac{4}{5S}\right)^{\frac{2}{3}}$, а S — предельное значение коэффициента асимметрии (23). Эти формулы были получены А. Н. Колмогоровым [15], [19]. Значения $D_{uu}(r)$ и $D_{nn}(r)$ при промежуточных значениях r были рассчитаны А. М. Обуховым [21] с помощью уравнения (22) в предположении, что S постоянно не только в инерционном интервале, но и повсюду.

Результаты расчета оказались в хорошем согласии с измерениями Гедеке [22] для расстояний r от 0,1 до 80 *см*. Формула (25) для $D_{nn}(r)$ в инерционном интервале может быть переписана, с учетом (16), в виде

$$\frac{\sigma_{\Delta u_n}(r)}{v_*} = A\left[\zeta f'(\zeta) - \zeta\right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r}{xz}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{26}$$

что является существенной детализацией соответствующей формулы (14). При условиях, близких к безразличной стратификации (малые ζ), формула (26) принимает вид

$$\frac{\sigma_{\Delta u_n}(r)}{v_*} = A\left(1 - \frac{1-\beta}{3}\zeta\right)\left(\frac{r}{xz}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{27}$$

Эта формула (для случаев безразличной стратификации) была экспериментально подтверждена измерениями А. М. Обухова [23] для расстояний r от 2 до 60 *см* и на высотах $z = \frac{3}{2}$, 3 и 15 *м*. Соответствующий график приведен на рис. 7. При этом для A получено значение 1,1 (при $S = -0{,}4$ получается $A \approx 1{,}5$).

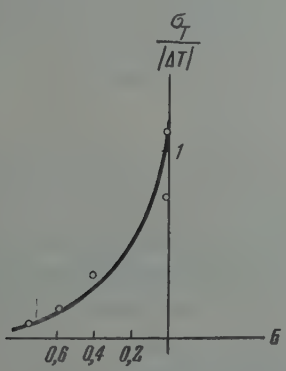

Рис. 6

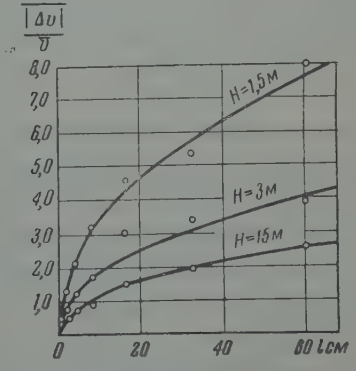

Рис. 7

Рис. 6. Значения $\frac{\sigma_T}{|\Delta T|}$ при различных значениях параметра устойчивости $Б$ по А. В. Перепелкиной [11]

Рис. 7. Поперечная структурная функция поля ветра по данным А. М. Обухова [23]

2.6. Пространственные разности температуры. Вопрос о локальной структуре температурного слоя анализировался А. М. Обуховым [16] и А. М. Ягломом [24]. Вследствие изотропности и благодаря несжимаемости потока величины Δu и ΔT некоррелированы. Однако они не независимы, как показывает полученное в [24] уравнение

$$D_{lTT}(r) - 2\chi \frac{\partial D_{TT}(r)}{\partial r} = -\frac{4}{3} Nr, \tag{28}$$

аналогичное уравнению Колмогорова (22). Здесь $D_{TT} = \overline{(\Delta T)^2}$ — структурная функция температурного поля, а $D_{lTT} = \overline{\Delta u_l (\Delta T)^2}$. Безразмерная величина

$$F = D_{lTT} D_{ll}^{-\frac{1}{2}} D_{TT}^{-1} \tag{29}$$

зависит лишь от $\frac{r}{\eta_l}$ и при $r \gg \eta$ стремится к отрицательной постоянной. С помощью п.° 2.2 и формул (28) — (29) получается

$$\text{при } r \gg \eta: \quad D_{TT}(r) = \frac{1}{3} \frac{N}{\chi} r^2$$

$$\text{в инерционном интервале:} \quad D_{TT}(r) = \frac{B^2}{\alpha \chi^2} N \varepsilon^{-\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}}, \tag{30}$$

где $B^2 = -\frac{4\alpha\chi^2}{3F} \left(-\frac{5S}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Формула (30) в инерционном интервале с помощью (16) приводится к виду

$$\frac{\sigma_{\Delta T}}{|T_*|} = B \left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{\sqrt{1 - \frac{1}{f'(\zeta)}}} \right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r}{\chi z}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{31}$$

что является существенной детализацией соответствующей формулы (14). При условиях, близких к безразличной стратификации (малые $|\zeta|$), получается

$$\frac{\sigma_{\Delta T}}{|T_*|} = B \left(1 + \frac{2\beta + 1}{\alpha} \zeta\right) \left(\frac{r}{\chi z}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{32}$$

Измерения функции $D_{TT}(r)$ в инерционном интервале впервые осуществлены С. И. Кречмером [25] и затем В. И. Татарским [17] и Шиотани [26], причем был подтвержден закон $D_{TT} \sim r^{\frac{2}{3}}$. Экспериментальные данные С. И. Кречмера приведены на рис. 8. Наиболее детальные измерения (для r от 3 до 100 *см* и на высотах $z = \frac{3}{2}$, 16 и 22 *м*) описаны в [17], где для постоянной B получено значение, близкое к единице.

2.7. Распределения вероятностей для временных разностей. Согласно п.° 2.2, для разностей (13) существует совместное условное распределение вероятностей при условии, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ фиксировано, и при достаточно малых θ это распределение зависит лишь от вектора $\theta \mathbf{u}_1$, значения θ и параметров ν, χ, ε, N. При этом величины $\frac{\Delta_\theta \mathbf{u}}{(\nu\varepsilon)^{1/4}}$, $\frac{\Delta_\theta T}{(N^2 \nu \varepsilon^{-1})^{1/4}}$ при фиксированном $\mathbf{u}_1$ являются изотропными случайными функциями безразмерного векторного аргумента $\frac{\theta \mathbf{u}_1}{\tau_1}$, зависящими также от безразмерного аргумента $\frac{\theta}{(\nu/\varepsilon)^{1/2}}$ (и от числа Прандтля χ/ν).

В инерционном интервале (т. е. при значениях $\theta|\mathbf{u}_1|$ и θ, больших по сравнению с η и $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ соответственно, но малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов) величины $\frac{\Delta_\theta \mathbf{u}}{(\varepsilon\theta)^{1/2}}$ и $\frac{\Delta_\theta T}{(N\theta)^{1/2}}$ являются изотропными случайными функциями от безразмерного векторного аргумента $\frac{\mathbf{u}_1}{(\varepsilon\theta)^{1/2}}$.

В отличие от пространственных разностей (12), условные распределения, для временных разностей (13) при условии, что значение $\mathbf{u}_1$ фиксировано, существенно зависят от значения $\mathbf{u}_1$. Практический интерес, конечно, представляют лишь те условные распределения, которые соответствуют значениям $\mathbf{u}_1$, достаточно часто встречающимся в природе. В приземном слое воздуха пульсации скорости, как правило, на порядок меньше осредненной скорости ветра, так что практический интерес представляют лишь значения $\mathbf{u}_1$, близкие к средней скорости ветра $\bar{\mathbf{u}}_1$. Естественно считать, что все условные распределения для разностей (13) при различных фиксированных $\mathbf{u}_1$, близких к $\bar{\mathbf{u}}_1$, близки друг к другу и, следовательно, близки к условному распределению, соответствующему значению $\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1$.

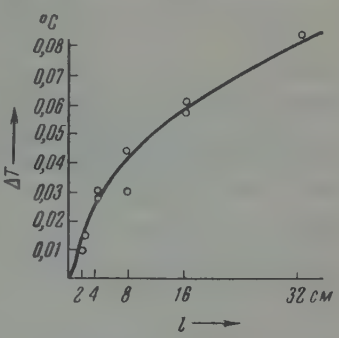

Рис. 8. Структурная функция температурного поля по данным С. И. Кречмера [25]

Таким образом, приближенно можно считать, что при достаточно малых θ и при значениях $\mathbf{u}_1$, близких к $\bar{\mathbf{u}}_1$, величины $\frac{\Delta_\theta \mathbf{u}}{(\nu\varepsilon)^{1/4}}$, $\frac{\Delta_\theta T}{(N^2\nu\varepsilon^{-1})^{1/4}}$ являются изотропными случайными функциями от $\frac{\theta\bar{\mathbf{u}}_1}{\eta}$, зависящими также от $\frac{\theta}{(\nu/\varepsilon)^{1/2}}$, а в инерционном интервале (т. е. при значениях $\theta\bar{u}$ и θ, больших по сравнению с η и $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ соответственно, но малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов) величины $\frac{\Delta_\theta \mathbf{u}}{(\varepsilon\theta)^{1/2}}$, $\frac{\Delta_\theta T}{(N\theta)^{1/2}}$ являются изотропными случайными функциями от $\frac{\bar{\mathbf{u}}_1}{(\varepsilon\theta)^{1/2}}$. Специальной системой координат для разностей $\Delta_\theta \mathbf{u}$ при этом будет обычно употребляемая система, ось x которой направлена вдоль среднего ветра.

Все изложенные выше соображения о структуре моментов величин $\Delta\mathbf{u}$, ΔT (кроме выводов, вытекающих из несжимаемости потока и из динамических уравнений (22) и (28)) справедливы и для $\Delta_\theta \mathbf{u}$, $\Delta_\theta T$. В частности первые моменты этих величин равны нулю, величины $\Delta_\theta u$, $\Delta_\theta v$, $\Delta_\theta w$ не коррелированы (но каждая из них, вообще говоря, коррелирует с $\Delta_\theta T$); величины $\Delta_\theta v$ и $\Delta_\theta w$ имеют одинаковые симметричные распределения, и для их моментов справедливы утверждения, высказанные выше в связи с формулой (24).

2.8. Временные структурные функции. Согласно п. 2.7, вторые моменты разностей (13) (временные структурные функции) в инерционном интервале имеют вид

$$\overline{(\Delta_\theta u)^2} = d_{uu}(\theta) = \overline{u}^2 \psi_u\left(\frac{\varepsilon\theta}{\overline{u}^2}\right),$$

$$\overline{(\Delta_\theta v)^2} = \overline{(\Delta_\theta w)^2} = d_{ww}(\theta) = \overline{u}^2 \psi_w\left(\frac{\varepsilon\theta}{\overline{u}^2}\right), \qquad (33)$$

$$\overline{(\Delta_\theta T)^2} = d_{TT}(\theta) = \frac{N}{\varepsilon}\overline{u}^2 \psi_T\left(\frac{\varepsilon\theta}{\overline{u}^2}\right).$$

Учитывая (4) и (16), эти формулы следует признать существенной детализацией соответствующих формул (14).

Каких-либо утверждений о виде функций $\psi_u(\xi)$, $\psi_w(\xi)$, $\psi_T(\xi)$ из теории локально-изотропной турбулентности извлечь не удается. Однако, если воспользоваться представлением о «замороженной турбулентности», то при замене θ на $\frac{r}{u}$ формулы (33) должны превратиться в соответствующие формулы (25) и (30), так что должно быть

$$\psi_u(\xi) = \frac{3}{4} A^2 \xi^{\frac{2}{3}}; \quad \psi_w(\xi) = A^2 \xi^{\frac{2}{3}}; \quad \psi_T(\xi) = \frac{B^2}{\alpha\varkappa} \xi^{\frac{2}{3}}. \qquad (34)$$

Поскольку временные функции измерять гораздо легче, чем пространственные, их анализу посвящалось довольно много работ (Шиотани [26] — [27], Мак-Криди [28], Вебб [29], Р. Тэйлор [30], А. В. Перепелкина [11], А. М. Яглом [31] и др.). В ряде этих работ вместо структурных изучались корреляционные функции, т. е. функции вида $b_{ww}(\theta) = w'(t)\,w'(t+\theta)$, связанные со структурными функциями (33) соотношениями

$$d_{ww}(\theta) = 2[b_{ww}(0) - b_{ww}(\theta)], \qquad (35)$$

или же соответствующие коэффициенты корреляции $R_{ww}(\theta) = \frac{b_{ww}(\theta)}{\sigma_w^2}$. Однако использование структурных функций позволяет избежать трудностей, связанных с «эволюцией уровня» метеорологических полей (напомним, впрочем, что для вертикальной компоненты скорости эти трудности не возникают).

Перечисленные работы показывают, что при достаточно малых θ для структурных функций (33) выполняется «закон двух третей», т. е. справедливы формулы (34). При больших θ, выходящих за пределы инерционного интервала, «закон двух третей», вообще говоря, перестает быть справедливым. При этом $d_{ww}(\theta)$ сравнительно быстро приближается к своему предельному значению $2\sigma_w^2$, а рост $d_{uu}(\theta)$ и $d_{TT}(\theta)$ замедляется. На рис. 9 мы приводим пример функции $R_{ww}(\theta)$ по данным А. В. Перепелкиной [11]. Эмпирическое построение универсальных функций $\psi_u(\xi)$, $\psi_w(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ и оценка предельного значения ξ для инерционного интервала еще не осуществлялись. По предварительным оценкам, основанным на данных [11],

«закон двух третей» для w и T выполняется до значений ξ порядка 0,002—0,003.

2.9. Масштаб турбулентности. Масштабом турбулентности l естественно называть характерный размер макроструктурных турбулентных элементов. Такой масштаб называют внешним, в отличие от внутреннего масштаба η, определенного в п. 2.2. Согласно теории подобия п.° 1.2, должно быть $l = z\Lambda(\zeta)$, где $\Lambda(\zeta)$ — некоторая универсальная функция. Значение l можно определить, например, как «радиус корреляции» (расстояние, на котором сохраняется заметная корреляция между пульсациями данной метеорологической величины) или же как длину волны, соответствующую максимуму пространственного спектра кинетической энергии турбулентности. Пользуясь представлением «о замороженной турбулентности», можно определить масштаб турбулентности по направлению среднего ветра формулой $l = \bar{u}\theta$, где θ — характерный масштаб изменений временной корреляционной функции (например, $\theta_w = \int_0^\infty R_{ww}(\theta)\,d\theta$) или же период колебаний, соответствующий максимуму частотного спектра турбулентности. Такой подход к изучению масштаба турбулентности использован в обширном исследовании Вебба [29], а также в работах Шиотани [26]—[27], Перепелкиной [11] и других авторов. Аппроксимируя корреляционную кривую, представленную на рис. 9, формулой $R_{ww}(\theta) = \left(1 - a\frac{\theta}{\theta_w}\right) \times \exp\left(-\frac{\theta}{\theta_w}\right)$, Перепелкина получила $\theta_w \approx 0{,}7$ *сек* и, поскольку измерения в этом примере производились при скорости ветра $\bar{u} = 1{,}8$ *м/сек*, $l \approx 1{,}3$ *м*. Соизмеримость масштаба турбулентности l с высотой наблюдения z (или даже приближенная пропорциональность l высоте z) является, по-видимому, типичной для условий в приземном слое воздуха.

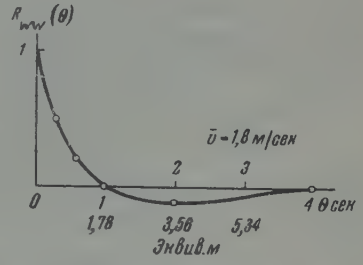

Рис. 9. Пример коэффициента автокорреляции $R_{ww}(\theta)$ по данным А. В. Перепелкиной [11].

§ 3. Спектральные характеристики турбулентности*

3.1. Спектральное разложение по горизонтали. Считая метеорологические поля u_i и T, согласно п.° 1.1, однородными по горизонтали (и стационарными) случайными функциями, мы можем представить каждое из этих полей в фиксированный момент времени t в фиксированной горизонтальной плоскости $z = \text{const}$ в виде суперпозиции элементарных гармонических компонент со случайными некоррелированными (комплексными)

* Доказательства всех используемых в настоящем параграфе теорем о спектральном разложении однородных, локально-однородных и локально-изотропных случайных функций изложены, например, в статье А. М. Яглома [32].

амплитудами

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int e^{i\mathbf{px}} A_i(d\mathbf{p};\ z, t);\ T(\mathbf{x}, t) = \int e^{i\mathbf{px}} A_T(d\mathbf{p};\ z, t), \tag{36}$$

где $\mathbf{p}$ — горизонтальный волновой вектор, а $A_i(P;\ z, t)$, $A_T(P;\ z, t)$ — случайные спектральные меры, т. е. вполне аддитивные случайные функции множеств P волнового пространства, обладающие свойствами

$$A_i(-P;\ z, t) = A_i^*(P;\ z, t);\ A_T(-P;\ z, t) = A_T^*(P;\ z, t);$$

$$\overline{A_i(P_1;\ z, t)\, A_j^*(P_2;\ z, t)} = \int\limits_{P_1 \cdot P_2} S_{ij}(\mathbf{p}, z)\, d\mathbf{p}, \tag{37}$$

$$\overline{A_T(P_1;\ z, t)\, A_T^*(P_2;\ z, t)} = \int\limits_{P_1 \cdot P_2} S_{TT}(\mathbf{p}, z)\, d\mathbf{p},$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину, S_{ij} — неотрицательная эрмитова матрица, а $S_{TT} \geqslant 0$. Вытекающая из (36) — (37) формула

$$\overline{u_i(\mathbf{x}, t)\, u_j(\mathbf{x}, t)} = \int S_{ij}(\mathbf{p}, z)\, d\mathbf{p} \tag{38}$$

показывает, что тензор $S_{ij}(\mathbf{p}, z)$ представляет плотность в волновом пространстве величин, соответствующих тензору энергии $\overline{u_i(\mathbf{x}, t)\, u_j(\mathbf{x}, t)}$, и в этом смысле описывает спектр кинетической энергии турбулентности. В связи с этим $S_{ij}(\mathbf{p}, z)$ называется спектральным тензором энергии. Аналогичный смысл имеет спектральная функция температурного поля $S_{TT}(\mathbf{p}, z)$.

Спектральные функции $S_{ij}(\mathbf{p}, z)$ и $S_{TT}(\mathbf{p}, z)$ можно считать непрерывными по $\mathbf{p}$, так как существование скачков или линий в спектре невозможно из-за действия нелинейных динамических процессов, стремящихся распределить энергию по непрерывной совокупности волновых чисел.

Спектральные функции не поддаются непосредственному измерению; однако, они связаны с доступными измерению пространственными структурными функциями (14) при горизонтальном векторе $\mathbf{r}$:

$$\overline{\Delta u_i \Delta u_j} = D_{ij}(\mathbf{r}) = 2\int (1 - \cos \mathbf{pr})\, S_{ij}(\mathbf{p}, z)\, d\mathbf{p},$$

$$\overline{(\Delta T)^2} = D_{TT}(\mathbf{r}) = 2\int (1 - \cos \mathbf{pr})\, S_{TT}(\mathbf{p}, z)\, d\mathbf{p}. \tag{39}$$

Рассматривая, в частности, векторы $\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$, параллельные направлению среднего ветра, и обозначив

$$S_{ij}^{(L)}(p_1, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{ij}(\mathbf{p}, z)\, dp_2;\ S_{TT}^{(L)}(p_1,\ z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{TT}(\mathbf{p}, z)\, dp_2 \tag{40}$$

спектральные функции метеорологических полей вдоль прямой L, параллельной направлению среднего ветра, получим

$$D_{ii}(r_1) = 4\int\limits_0^{\infty} (1 - \cos p_1 r_1)\, S_{ii}^{(L)}(p_1, z)\, dp_1,$$

$$D_{TT}(r_1) = 4\int\limits_0^{\infty} (1 - \cos p_1 r_1)\, S_{TT}^{(L)}(p_1, z)\, dp_1. \tag{41}$$

Согласно теории подобия п.° 1.2, при любых волновых числах p_1 (исключая очень большие p_1, соответствующие микромасштабам, в которых становится существенным действие молекулярной вязкости и теплопроводности) спектральные функции (40) должны иметь вид

$$S_{ij}^{(L)}(p_1, z) = v_*^2 z \overline{S}_{ij}^{(L)}(p_1 z, \zeta); \quad S_{TT}^{(L)}(p_1, z) = T_*^2 z \overline{S}_{TT}^{(L)}(p_1 z, \zeta), \tag{42}$$

где $\overline{S}_{ij}^{(L)}$ и $\overline{S}_{TT}^{(L)}$ — некоторые универсальные функции. Отсюда видно, что волновые числа, соответствующие экстремумам спектральных функций, должны иметь вид $m(\zeta)/z$, где $m(\zeta)$ — некоторые универсальные функции.

3.2. Пространственный спектр локально-изотропной турбулентности. Считая метеорологические поля u_i и T, согласно п.° 2.2, локально-изотропными, мы можем представить их в виде

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i(0, t) + \int (e^{i\mathbf{px}} - 1)\, a_i(d\mathbf{p}, t),$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T(0, t) + \int (e^{i\mathbf{px}} - 1)\, a_T(d\mathbf{p}, t), \tag{43}$$

где $\mathbf{p}$ — трехмерный волновой вектор, и интегрирование ведется по всему волновому пространству за вычетом нулевой точки $\mathbf{p} = 0$. Случайные спектральные меры $a_i(P, t)$ и $a_T(P, t)$ обладают при этом свойствами

$$a_i(-P, t) = a_i^*(P, t); \quad a_T(-P, t) = a_T^*(P, t), \tag{44}$$

$$\overline{a_i(P_1, t)\, a_j^*(P_2, t)} = \int_{P_1 \cdot P_2} s_{ij}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p},$$

$$\overline{a_T(P_1, t)\, a_T^*(P_2, t)} = \int_{P_1 \cdot P_2} s_{TT}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p},$$

причем спектральные функции $s_{ij}(\mathbf{p})$, $s_{TT}(\mathbf{p})$ имеют вид

$$s_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{E(p)}{4\pi p^2}\left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}\right); \quad s_{TT}(\mathbf{p}) = \frac{G(p)}{4\pi p^2}, \tag{45}$$

где спектральная плотность энергии $E(p)$ и спектральная плотность температурного поля $G(p)$ описывают распределение кинетической энергии турбулентности и квадратов амплитуд температурного поля по волновым числам p.

Пространственные структурные функции $D_{ij}(\mathbf{r})$ и $D_{TT}(\mathbf{r})$ выражаются через спектральные плотности $E(p)$ и $G(p)$ следующим образом:

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2\int_{+0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sin pr}{pr} + 3\frac{\cos pr}{p^2r^2} - 3\frac{\sin pr}{p^3r^3}\right)\frac{r_i r_j}{r^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{\sin pr}{pr} - \frac{\cos pr}{p^2r^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sin pr}{p^3r^3}\right)\delta_{ij}\right] E(p)\, dp, \tag{46}$$

$$D_{TT}(\mathbf{r}) = 2\int_{+0}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin pr}{pr}\right) G(p)\, dp.$$

Рассматривая, в частности, векторы $\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$, параллельные направлению среднего ветра, имеем

$$D_{ii}(r_1) = 4\int_{+0}^{\infty}(1 - \cos p_1 r_1)\, s_{ii}^{(L)}(p_1)\, dp_1,$$

$$D_{TT}(r_1) = 4\int_{+0}^{\infty}(1 - \cos p_1 r_1)\, s_{TT}^{(L)}(p_1)\, dp_1 \tag{47}$$

(в специальной системе координат при $i \neq j$ структурные функции $D_{ij}(r_1)$ равны нулю), где

$$s_{11}^{(L)}(p_1) = \frac{1}{2}\int_{|p_1|}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^2\right]\frac{E(p)}{p}\,dp,$$

$$s_{22}^{(L)}(p_1) = s_{33}^{(L)}(p_1) = \frac{1}{4}\int_{|p_1|}^{\infty}\left[1 + \left(\frac{p_1}{p}\right)^2\right]\frac{E(p)}{p}\,dp, \tag{48}$$

$$s_{TT}^{(L)}(p_1) = \frac{1}{2}\int_{|p_1|}^{\infty}\frac{G(p)}{p}\,dp$$

— спектральные функции метеорологических полей вдоль прямой $\mathscr{L}$, параллельной направлению среднего ветра.

Заметим, что гипотезы о локальной изотропности турбулентности формулируются лишь для расстояний, малых по сравнению с масштабами макроструктурных элементов и, соответственно, для волновых чисел, больших по сравнению с волновыми числами макроструктурных элементов. Используя формулы настоящего параграфа лишь при малых r и учитывая, что при этом вклад малых волновых чисел в интегралы (46) — (47) мал, мы не совершаем сколько-нибудь большой ошибки, распространяя предположения об изотропности на значения подынтегральных функций при любых p.

Согласно теории подобия для локально-изотропной турбулентности, спектральные плотности $E(p)$ и $s_{ii}^{(L)}(p)$ имеют вид $\eta\sqrt{\nu\varepsilon}\,F(p\eta)$, а $G(p)$ и $s_{TT}^{(L)}(p)$ представляются в виде $N\eta\left/\frac{\nu}{\varepsilon}\right.F(p\eta)$, где $F(p)$ — соответствующие универсальные функции. В инерционном интервале спектра будет

$$E(p) \quad \frac{55}{36}\frac{A^2}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\varepsilon^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{5}{3}};\ s_{11}^{(L)}(p_1) = \frac{9}{55}E(p_1);\ s_{22}^{(L)}(p_1) = \frac{12}{55}E(p_1)$$

$$G(p) = \frac{10}{9}\frac{B^2}{\alpha\varkappa^2\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}N_\xi^{-\frac{1}{3}}p^{-\frac{5}{3}};\ s_{TT}^{(L)}(p_1) = \frac{3}{10}G(p_1), \tag{49}$$

где A, B, α, $\varkappa$ — постоянные, входящие в формулы (25) и (30) для струк-

турных функций. Формулы (49) для функций (48) можно переписать в виде

$$\frac{s_{11}^{(L)}(p_1)}{v_*^2 z} = \frac{\varkappa A^2}{4\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left[\zeta f'(\zeta) - \zeta\right]^{\frac{2}{3}}(\varkappa p_1 z)^{-\frac{5}{3}},$$

$$\frac{s_{TT}^{(L)}(p_1)}{T_*^2 z} = \frac{\varkappa B^2}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{\sqrt{1-\frac{1}{f'(\zeta)}}}\right]^{\frac{2}{3}}(\varkappa p_1 z)^{-\frac{5}{3}}, \qquad (50)$$

что является существенной детализацией формул (42).

Формула $E(p) \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{5}{3}}$ для спектра турбулентности в инерционном интервале впервые получена А. М. Обуховым [33]—[34]. В [34] в результате замыкания с помощью дополнительной гипотезы спектрального уравнения баланса турбулентной энергии построена формула для экстраполяции $E(p)$ в область больших волновых чисел, при которых становится существенным действие молекулярной вязкости.

Аналогичные гипотезы для замыкания спектрального уравнения энергии предлагались позднее Коважным [35], Гейзенбергом [36], Вейцзекерем [37], Карманом [38], Гольдштейном [39], Огура и Миякода [40]. Вопрос о замыкании спектрального уравнения энергии и о форме спектра изотропной турбулентности детально обсуждается в книге Бэтчелора [41].

3.3. Спектральное разложение по времени. Считая метеорологические величины u_i и T в фиксированной точке пространства $\mathbf{x}$, согласно п.[c] 1.1, стационарными случайными функциями, мы можем представить их в виде

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int e^{i\lambda t}\, \alpha_i(d\lambda, \mathbf{x});\quad T(\mathbf{x}, t) = \int e^{i\lambda t}\, \alpha_T(d\lambda, \mathbf{x}) \qquad (51)$$

(если функции u_i и T считать лишь локально стационарными, то в формулы (51) следует ввести видоизменение, аналогичное переходу от (36) к (43)).

Случайные спектральные меры $\alpha_i(\Lambda, \mathbf{x})$ и $\alpha_T(\Lambda, \mathbf{x})$ обладают при этом свойствами

$$\alpha_i(-\Lambda, \mathbf{x}) = \alpha_i^*(\Lambda, \mathbf{x});\quad \alpha_T(-\Lambda, \mathbf{x}) = \alpha_T^*(\Lambda, \mathbf{x});$$

$$\overline{\alpha_i(\Lambda_1, \mathbf{x})\alpha_j^*(\Lambda_2, \mathbf{x})} = \int_{\Lambda_1\Lambda_2} \sigma_{ij}(\lambda, z)\, d\lambda, \qquad (52)$$

$$\alpha_T(\Lambda_1, \mathbf{x})\overline{\alpha_T^*(\Lambda_2, \mathbf{x})} = \int_{\Lambda_1\Lambda_2} \sigma_{TT}(\lambda, z)\, d\lambda,$$

где σ_{ij} (неотрицательная эрмитова матрица) — временной спектральный тензор энергии, а $\sigma_{TT}\ (\geqslant 0)$ — спектральная плотность температурного поля.

Имеем также

$$\overline{\alpha_i(\Lambda_1, \mathbf{x})\alpha_T^*(\Lambda_2, \mathbf{x})} = \int_{\Lambda_1\Lambda_2} \sigma_{iT}(\lambda, z)\, d\lambda, \qquad (53)$$

где σ_{iT} — взаимная спектральная плотность величин u_i и T.

Между временными спектральными и структурными функциями имеется связь, аналогичная (39) и (41). В частности, справедливы формулы

$$d_{ii}(\theta) = 4\int_0^\infty (1 - \cos\lambda\theta)\,\sigma_{ii}(\lambda, z)\,d\lambda,$$

$$d_{TT}(\theta) = 4\int_0^\infty (1 - \cos\lambda\theta)\,\sigma_{TT}(\lambda, z)\,d\lambda. \tag{54}$$

Согласно теории подобия п.° 1.2, при не слишком больших частотах $|\lambda|$ (при которых действие молекулярной вязкости и теплопроводности несущественно) временные спектральные функции имеют вид

$$\sigma_{ij}(\lambda, z) = v_*\bar{z}\bar{\sigma}_{ij}\left(\frac{\lambda z}{\bar{u}}, \zeta\right);\quad \sigma_{iT}(\lambda, z) = T_*\bar{z}\bar{\sigma}_{iT}\left(\frac{\lambda z}{\bar{u}}, \zeta\right);$$

$$\sigma_{TT}(\lambda, z) = \frac{T_*^2 z}{v_*}\,\bar{\sigma}_{TT}\left(\frac{\lambda z}{\bar{u}}, \zeta\right), \tag{55}$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\sigma}_{iT}$, $\bar{\sigma}_{TT}$ — некоторые универсальные функции. Отсюда следует, что частоты, соответствующие экстремумам и другим характерным точкам спектральных функций, должны иметь вид $\frac{\bar{u}}{z}\,n(\zeta)$, где $n(\zeta)$ — некоторые универсальные функции.

Согласно п.° 2.7, в интервале частот, соответствующем инерционному интервалу пространственного спектра, временные спектральные функции имеют вид

$$\sigma_{ij}(\lambda, z) = \frac{\bar{u}^4}{\varepsilon}\,\bar{\bar{\sigma}}_{ij}\left(\frac{\lambda\bar{u}^2}{\varepsilon}\right);\quad \sigma_{iT}(\lambda, z) = \frac{\bar{u}^4}{\varepsilon}\sqrt{\frac{N}{\varepsilon}}\,\bar{\bar{\sigma}}_{iT}\left(\frac{\lambda\bar{u}^2}{\varepsilon}\right);$$

$$\sigma_{TT}(\lambda, z) = \frac{\bar{u}^4 N}{\varepsilon^2}\,\bar{\bar{\sigma}}_{TT}\left(\frac{\lambda\bar{u}^2}{\varepsilon}\right), \tag{56}$$

что является существенной детализацией формул (55).

Согласно представлению о «замороженной турбулентности», между любой временной спектральной функцией $\sigma(\lambda, z)$ и соответствующей одномерной пространственной спектральной функцией $S^{(L)}(\rho_1, z)$ имеется соотношение

$$\sigma(\lambda, z) = \frac{1}{\bar{u}}\,S^{(L)}\left(\frac{\lambda}{\bar{u}}, z\right). \tag{57}$$

В частности, из (50), (56) — (57) следует, что

$$\bar{\bar{\sigma}}_{11}(l) = \frac{A^2}{4\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\,l^{-\frac{5}{3}};\quad \bar{\bar{\sigma}}_{TT}(l) = \frac{B^2}{3\varkappa^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\,l^{-\frac{5}{3}}. \tag{58}$$

3.4. Практические приемы временного спектрального анализа. Применяя измерительный прибор (например, термоанемометр), преобразующий пульсации метеорологической величины в данной точке потока во флюктуации электрического тока, и пропуская этот ток через систему параллельных полосовых фильтров с достаточно узкими полосами пропускаемых частот $\Delta\lambda$, мы получаем на выходе фильтров колебания, соответствующие спектральным компонентам пульсаций измеряемой метеорологической величины с частотами из соответствующих интервалов $\Delta\lambda$. Тем самым можно регистрировать и анализировать спектральные компоненты пульсаций $u_i(\Delta\lambda)$ и $T(\Delta\lambda)$. Обозначая λ некоторую среднюю точку интервала $\Delta\lambda$, имеем

$$\overline{u_i^2(\Delta\lambda)} \approx 2\sigma_{ii}(\lambda)\,\Delta\lambda; \quad \overline{T^2(\Delta\lambda)} \approx 2\sigma_{TT}(\lambda)\,\Delta\lambda; \tag{59}$$

$$u_i^2(\Delta\lambda)\,\overline{u_j(\Delta\lambda)} \approx 2\,\mathrm{Re}\,\sigma_{ij}(\lambda)\,\Delta\lambda; \quad \overline{u_i(\Delta\lambda)\,T(\Delta\lambda)} \approx 2\,\mathrm{Re}\,\sigma_{iT}(\lambda)\,\Delta\lambda$$

(в (51) интегрирование ведется по λ от $-\infty$ до $+\infty$, но практически рассматриваются лишь положительные частоты, и поскольку $\sigma_{ii}(-\lambda) = \sigma_{ii}(\lambda)$, спектральная плотность в частоте λ равна $2\sigma_{ii}(\lambda)$.) (Из взаимных спектральных функций наибольший практический интерес представляют функции $2\mathrm{Re}\,\sigma_{uw}(\lambda)$ и $2\mathrm{Re}\,\sigma_{wT}(\lambda)$, характеризующие вклад в турбулентное напряжение трения τ и соответственно в турбулентный поток тепла q вихрей с различными частотами λ. Прямых измерений этих функций еще не имеется, некоторые косвенные данные приводятся ниже.

Непосредственная корреляция между спектральными компонентами двух метеорологических величин позволяет оценить лишь действительную часть их взаимной спектральной плотности и, следовательно, не дает достаточно полной информации о фазовых соотношениях между этими спектральными компонентами.

Поэтому вычисляются также так называемые квадратурные спектры

$$\overline{u_i(\Delta\lambda)\,u_j^{+}(\Delta\lambda)} \approx 2\,\mathrm{Im}\,\sigma_{ij}(\lambda)\,\Delta\lambda; \quad u_i(\Delta\lambda)\,T^{+}(\Delta\lambda) \approx 2\,\mathrm{Im}\,\sigma_{iT}(\lambda)\,\Delta\lambda, \tag{60}$$

где значок плюс означает, что данная спектральная компонента берется сдвинутой по фазе и частоте λ на $+\frac{\pi}{2}$. В качестве полной меры корреляции между двумя метеорологическими величинами Пановский и Мак-Кормик [42] предлагают использовать «когерентность», определяемую, например, для u_i и u_j формулой

$$\mathrm{coh}_{ij}(\lambda) = \frac{|\sigma_{ij}(\lambda)|^2}{\sigma_{ii}(\lambda)\,\sigma_{jj}(\lambda)}. \tag{61}$$

Прямой метод измерения спектральных функций метеорологических величин, основанный на формулах (59), применялся Мак-Криди [28], который анализировал спектральные компоненты в частотах 2,5; 10 и 40 *гц* и установил, что в этом интервале частот $\sigma_{ii}(\lambda) \sim \lambda^{-5/3}$, в согласии с формулами (58).

Косвенным способом определения спектральных функций является их

вычисление по измеренным временным корреляционным функциям с помощью формул типа

$$2\sigma_{ii}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\theta b_{ii}(\theta)\,d\theta;\quad 2\sigma_{TT}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda\theta b_{TT}(\theta)\,d\theta. \tag{62}$$

Хотя при использовании корреляционных функций возникают трудности, связанные с «эволюцией уровня» метеорологических полей, способ, основанный на формулах типа (62), применялся во многих работах (Шиотани [26], Вебб [29], Пановский и Мак-Кормик [42] и др.). В [26] и [29] был подтвержден закон $\sigma_{ii}(\lambda) \sim \lambda^{-1/3}$, причем Вебб указывает в качестве нижней границы участка спектра, в котором действует этот закон, частоты порядка $\frac{1}{40} \div \frac{1}{20}$ *гц*. Заметим, однако, что частоты λ имеют лишь относительный смысл: они зависят как от своих «носителей» — турбулентных элементов, так и от средней скорости ветра $\bar{u}$. В [42] используются безразмерные «частоты» $\lambda z/\bar{u}$, имеющие абсолютный смысл, и отмечается, что нижней границе инерционного интервала соответствуют значения $\frac{\lambda z}{\bar{u}}$, близкие к единице.

Сведения о спектральных функциях турбулентности в низкочастотной области, полученные в работах Пановского [43], Пановского и Ван-дер Ховена [44], Пановского и Мак-Кормика [42], Вебба [29] (сводка данных о спектре w при неустойчивой стратификации дается Диконом [9]) сводятся к тому, что при устойчивой стратификации спектры имеют максимум около значений $\frac{\lambda z}{\bar{u}}$ порядка 0,2—0,3, а при неустойчивой стратификации отмечается также второй максимум около значений $\frac{\lambda z}{\bar{u}}$ порядка 0,05 (соответствующий, очевидно, относительно крупным конвективным турбулентным элементам). Некоторые данные о зависимости спектров от метеорологических условий излагаются в [42].

Своеобразным способом спектрального анализа является осреднение по различным интервалам времени θ. При таком осреднении амплитуды спектральных компонент с частотой λ приобретают множитель $\frac{\sin(\lambda\theta/2)}{(\lambda\theta/2)}$, а соответствующие спектральные плотности умножаются на квадрат этого множителя, так что удельный вес высокочастотных компонент резко понижается. Поэтому указанный способ удобен для выделения низкочастотных компонент.

Этот прием был использован Пановским [45], который установил, что значения напряжения трения τ и турбулентного потока тепла q, вычисленные по пульсациям, осредненным по интервалам 1 *сек* и 10 *сек*, близки друг к другу, а энергия вертикальных пульсаций при переходе от 1-секундных к 10-секундным средним уменьшается. Применяя осреднение по интервалам $\theta = 10, 70$ и 490 *сек*, Пановский смог изучать поотдельности компоненты турбулентности в трех участках спектра: с периодами от 20 *сек* до 2,5 *мин* («малые» вихри), 2,5—17 *мин* («средние» вихри) и > 17 *мин* («крупные» вихри). Процентный вклад этих трех сортов вихрей

в энергию вертикальных пульсаций $\overline{w'^2}$, поток тепла q и напряжение трения τ, по оценке Пановского, равен:

—	„Малые"	„Средние"	„Крупные" вихри
$\overline{w'^2}$	60(35)	29(35)	7(19)
q	46(13)	26(21)	23(61)
τ	55(13)	48(64)	—3(21)

(данные относятся к высоте 75 футов, а цифры в скобках — к высоте 300 футов). Эти данные показывают, что с ростом высоты спектры смещаются в сторону низких частот.

А. В. Перепелкина [11] исследовала вопрос о влиянии осреднения по времени пульсаций w' и T' на значения q, σ_w^2 и σ_T^2 и установила, что вклад вихрей с периодами менее 2 *сек* в турбулентный поток тепла составляет около 50%, что согласуется с аналогичным результатом Мак-Криди [28] (в противоположность Свинбенку [46], получившему примерно одни и те же значения q по пульсациям, измеренным приборами с инерцией 0,2 *сек* и 2 *сек*). Вклад таких вихрей в σ_w^2, по [11], составляет около 20%, и в σ_T^2 — около 66%.

Метод спектрального анализа может быть основан также на рассмотрении последовательных производных по времени от значений метеорологических величин в данной точке потока (путем электрического дифференцирования соответствующих флюктуирующих токов). При дифференцировании амплитуды спектральных компонент умножаются на частоту λ, а спектральные функции на λ^2, так что удельный вес высокочастотных компонент резко повышается. Поэтому указанный способ удобен для изучения высокочастотных компонент. Этот способ применялся для исследования турбулентности в трубах Бэтчелором и Таунсендом [47].

3.5. **Свойства спектральных компонент турбулентности.** По данным регистрации спектральных компонент $u_i(\Delta\lambda)$, $T(\Delta\lambda)$ можно изучать не только их дисперсии и смешанные вторые моменты (т. е. спектральные функции), но и всевозможные другие характеристики, подобные рассмотренным в п.° 1.5.

Имеются основания полагать, что распределения вероятностей для спектральных компонент скорости должны все более отклоняться от нормальных при продвижении в область высоких частот. Так, согласно измерениям Бэтчелора и Таунсенда [47], в трубах коэффициенты эксцесса для производных $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ быстро растут с ростом n. Большой коэффициент эксцесса означает, что данная величина принимает близкие к нулю значения чаще, чем нормальная случайная величина. Следовательно, при продвижении в область высоких частот у спектральных компонент скорости должны наблюдаться все более длительные периоды покоя (что можно истолковать, как тенденцию к концентрации энергии высокочастотных компонент в небольших объемах). Правдоподобно предположение Бэтчелора, что высокочастотная компонента поля скорости с конечной вероятностью $p(\lambda)$ равна нулю и с вероятностью $1 - p(\lambda)$ имеет некоторое непрерывное (может быть, нормальное) распределение.

Распределения для $w(\Delta\lambda)$ и $T(\Delta\lambda)$ в области высоких частот должны

по-видимому, становиться симметричными, так как асимметрия распределений для w' и T' вызывается пульсациями термического происхождения, имеющими, как правило, относительно большие масштабы (относительно малые частоты).

Характеристики анизотропности спектральных компонент скорости $\frac{\sigma_v(\Delta\lambda)}{\sigma_u(\Delta\lambda)}$ и $\frac{\sigma_w(\Delta\lambda)}{\sigma_u(\Delta\lambda)}$ $\left(\text{функции от } \frac{\lambda z}{\bar{u}} \text{ и } \zeta\right)$ должны, по-видимому, приближаться к единице в области высоких частот.

Согласно Мак-Криди [28], ощутимая анизотропия начинается лишь с частот, меньших 2 *гц*. Креймер и Рекорд [48] приводят более сильную оценку: изотропность наблюдается до частот 0,5 *гц* на высоте 2 *м* и 0,3 *гц* на высоте 12 *м*.

Определенный интерес представил бы спектральный анализ вертикального турбулентного потока турбулентной энергии (9), т. е. вычисление третьих моментов спектральных компонент поля скорости

$$D(\Delta\lambda) = \frac{1}{2}\overline{w(\Delta\lambda)\left[u'^2(\Delta\lambda) + v'^2(\Delta\lambda) + w'^2(\Delta\lambda)\right]}. \tag{63}$$

§ 4. Некоторые другие проблемы

4.1. Структура поля давления. В ряде проблем (например, о генерации звуковых колебаний турбулентностью в сжимаемой жидкости) существенное значение имеют турбулентные пульсации давления. Вопрос о структуре поля давления был рассмотрен впервые А. М. Обуховым [49], показавшим, что в инерционном интервале структурная функция давления p определяется формулой

$$\overline{(\Delta p)^2} = D_{pp}(r) = \rho^2 [D_u(r)]^2. \tag{64}$$

Подробное исследование функции $D_{pp}(r)$ осуществлено в работе А. М. Обухова и А. М. Яглома [50]. Структура поля давления рассматривалась также Гейзенбергом [36], Иноуэ [51] и Бэтчелором [52].

4.2. Турбулентные ускорения. В работе А. М. Яглома [53] подсчитано среднее квадратичное значение, а в [50] — также корреляционные функции турбулентных ускорений. Эти ускорения определяются преимущественно мелкими турбулентными элементами и возникают благодаря действию как градиентов давления, так и сил вязкости, причем доминирующую роль играют градиенты давления. Средний квадрат величины турбулентных ускорений определяется формулой

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2} \approx 3\varepsilon^{3/2}\nu^{-1/2} \tag{65}$$

и (согласно формуле (16) для ε) оказывается пропорциональным v_*^5 (а потому и $\bar{u}^5$). Уже при $\bar{u} \approx 5{,}5$ *м/сек* турбулентные ускорения достигают значений порядка g.

4.3. Турбулентная диффузия. Ричардсон [54] эмпирически установил зависимость коэффициента турбулентной диффузии k от масштаба наблюдения l в форме $k \sim l^{4/3}$. Этот закон, получивший подтверждение в опытах

Стоммеля [55] по диффузии частиц, плавающих на поверхности воды в море, был объяснен А. М. Обуховым [34] как следствие теории подобия для инерционного интервала спектра турбулентности (согласно которой $k = c\varepsilon^{1/3} l^{1/3}$, где c — число). Предложенная еще Ричардсоном идея о рассмотрении относительной диффузии пары частиц в турбулентном потоке была развита, с учетом теории подобия, Бэтчелором [56] — [57].

В работах А. С. Монина [58] — [59] теория подобия для инерционного интервала была применена непосредственно к расчету концентрации диффундирующей примеси. Так, например, в случае опытов Стоммеля при наличии в начале координат в момент $t = 0$ мгновенного точечного источника примеси интенсивности G концентрация примеси имеет вид

$$s(r, t) = \frac{G}{\varepsilon t^3} \tilde{s}\left(\frac{r^2}{\varepsilon t^3}\right), \tag{66}$$

а при наличии стационарного источника $s(r) = \frac{\text{const}}{\varepsilon^{-1/3} r^{4/3}}$. Функция $\tilde{s}(\xi)$ может быть определена из уравнения диффузии $s(r, t) = A^t s(r, 0)$, где A^t — линейный оператор, трансформация Фурье которого вследствие локальной однородности и изотропности турбулентности является просто функцией $a(\varepsilon^{1/3} p^{2/3} t)$ (p — модуль волнового вектора). В [58] — [59] для $a(\theta)$ принимается аппроксимация $e^{-c\theta}$, соответствующая допущению, что операторы A^t образуют полугруппу.

В ряде работ (например, Френкель [60]) концентрация примеси при наличии мгновенного точечного источника описывается гауссовской функцией с дисперсиями

$$\overline{x_i^2(t)} = 2\overline{u_i^2} \int_0^t (t - \theta) R_{ii}(\theta)\, d\theta, \tag{67}$$

где $R_{ii}(\theta)$ — лангранжев коэффициент корреляции для u_i (т. е. коэффициент корреляции между значениями i-ой компоненты скорости жидкой частицы в моменты времени t и $t + \theta$). Формула (67) впервые предложена Тэйлором [61]. Свойства лагранжевой корреляционной функции (и, в частности, следствия теории подобия для инерционного интервала) изучались в работах Иноуэ [62].

К проблемам диффузии примыкают результаты Бэтчелора [63] об увеличении со временем длин материальных кривых и площадей материальных поверхностей, движущихся вместе с жидкостью в турбулентном потоке.

4.4. Распространение звуковых и электромагнитных волн в турбулентной атмосфере. Проблема «флюктуации и волны» является весьма широкой, и мы имеем возможность дать здесь лишь весьма краткий очерк некоторых аспектов этой проблемы. Создаваемые турбулентностью мелкие неоднородности атмосферы вызывают флюктуации амплитуды и фазы распространяющихся в атмосфере звуковых и электромагнитных волн (а также их рассеяние). Эти флюктуации экспериментально исследовались: в случае звука — В. М. Бовшеверовым и В. А. Красильниковым [64], В. А. Красильниковым [65] — [68], В. А. Красильниковым и К. М. Ивановым-Шиц [69], в случае ультракоротких радиоволн — В. А. Красильниковым [70], в

случае света от звезд (явления мерцания и дрожания звезд) — В. А. Красильниковым [71], И. Г. Колчинским [72], Миннаертом и Хаутгастом [73], Мегоу [74], в случае света наземных источников — Зидентопфом и Висшеком [75], а также другими авторами.

Основные теоретические результаты получены А. М. Обуховым [76]. Распространение звука, а также, если отвлечься от поляризационных эффектов, электромагнитных волн в среде с малыми случайными неоднородностями, каковой является турбулентная атмосфера, описывается скалярным уравнением

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi, \tag{68}$$

причем скорость волн равна $c = \frac{c_0}{n}$, где коэффициент преломления n имеет вид $1 + \mu$, $\mu \ll 1$. Флюктуации коэффициента преломления $\mu(r)$ образуют случайное поле, которое при рассмотрении высокочастотных колебаний можно считать не зависящим от времени. Плоская волна $\varphi_0 = A_0 e^{i(\omega t - k_0 x)}$ вследствие флюктуаций коэффициента преломления искажается и принимает вид $\varphi = \varphi_0 e^{-i\psi(\mathbf{r})}$, где $\psi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) + i \ln \frac{A(\mathbf{r})}{A_0}$ ($S(\mathbf{r})$ — флюктуация фазы, $A(\mathbf{r})$ — амплитуды). При малых μ, считая $\operatorname{grad}\psi$ малым и рассматривая случай, когда длина волны мала по сравнению с характерным масштабом неоднородностей поля ψ, функцию ψ можно определять из линейного уравнения

$$2k_0\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = 2\mu k_0^2, \tag{69}$$

решение которого имеет вид

$$\psi(x, y, z) = \frac{ik_0^2}{2\pi}\iiint\limits_{\xi \leqslant x} e^{-\frac{ik_0[(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}{2(x-\xi)}}\frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{x-\xi}\,d\xi d\eta d\zeta. \tag{70}$$

С помощью этой формулы можно вычислять статистические характеристики поля $\psi(\mathbf{r})$ по известным характеристикам поля $\mu(\mathbf{r})$. Так, в [76] рассмотрен случай корреляционной функции коэффициента преломления

$$\overline{\mu(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}+\mathbf{r})} = \sigma_\mu^2 e^{-\frac{\pi}{4}\frac{r^2}{l^2}}, \tag{71}$$

где l — интегральный масштаб неоднородностей поля μ. При этом в точке $x = L \gg l$ получается

$$\sigma_S = \frac{2\pi\sigma_\mu}{\lambda}\sqrt{Ll}\sqrt{1 + \frac{1}{2D}\operatorname{arctg} 2D},$$

$$\sigma_{\ln\frac{A}{A_0}} = \frac{2\pi\sigma_\mu}{\lambda}\sqrt{Ll}\sqrt{1 - \frac{1}{2D}\operatorname{arctg} 2D}, \tag{72}$$

где λ — длина волны, а $D = \frac{L\lambda}{l^2}$ — квадрат отношения размера первой зоны

Френеля к поперечному размеру неоднородностей. При $2D \ll 1$ $\left(\text{т. е. } L \ll L_{\text{кр}} = \frac{2l^2}{\lambda}\right)$ можно применять приближение геометрической оптики (акустики), использованное В. А. Красильниковым [66] — [67], [70] — [71]. При $2D \gg 1$ (т. е. $L \gg L_{\text{кр}}$) существенное значение приобретают дифракционные эффекты. В этом последнем случае в (72) можно положить $\sqrt{1 + \frac{1}{20}\operatorname{arctg} 2D} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{2D}\operatorname{arctg} 2D} \approx 1$.

Аналогичные методы расчета применялись в ранних работах А. М. Обухова [77] и Пекериса [78], в исследовании Л. А. Чернова [79] о корреляционных функциях флюктуаций волнового поля, в работах В. А. Красильникова и В. И. Татарского [80] и В. И. Татарского [81]. В [82] В. И. Татарским получено соотношение $\sigma_{\ln \frac{A}{A_0}} \sim L^{11/12}$, соответствующее «закону двух третей» для структурной функции коэффициента преломления. Связывая пульсации коэффициента преломления с пульсациями температуры и влажности, можно изучать зависимость флюктуаций волновых полей от метеорологических условий. Обзор исследований по распространению волн в турбулентной атмосфере дан в [83].

Поступила в редакцию
28. 3. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Обухов, Труды Ин-та теоретич. геофизики АН СССР, № 1 (1946).
[2] А. С. Монин, Информ. сборник ГУГМС, № 1 (1950).
[3] А. С. Монин, Климатические и микроклиматические исследования в Прикаспийской низменности, Изд-во АН СССР, 1953.
[4] А. С. Монин, А. М. Обухов, ДАН СССР, **93**, № 2 (1953).
[5] А. С. Монин, А. М. Обухов, Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 24 (151), 1954.
[6] А. Б. Казанский, А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1 (1956).
[7] А. Б. Казанский, А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6 (1958).
[8] C. H. B. Priestley, Quart. J. Roy. Met. Soc., **81** (1955), 139.
[9] E. L. Deacon, Tech. Pap. CSIRO, Div. Met. Phys., Melbourne, № 4 (1955).
[10] W. C. Swinbank, Tech. Pap. CSIRO, Div. Met. Phys., Melbourne, № 2 (1955).
[11] А. В. Перепелкина, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6 (1957).
[12] А. Р. Константинов, Труды ГГО, вып. **16** (78), 1949.
[13] А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3 (1950).
[14] G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, **164** (1938), 476.
[15] А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, **30**, № 4 (1941).
[16] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1 (1949).
[17] В. И. Татарский, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6 (1956).
[18] А. М. Обухов, Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 24 (151), 1954.
[19] А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, **32**, № 1 (1941).
[20] A. A. Townsend, Proc. Cambr. Phil. Soc., **44**, № 4 (1948).
[21] А. М. Обухов, ДАН СССР, **67**, № 4 (1949).
[22] K. Gödecke, Ann. d. Hydrographie, **10** (1936).
[23] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3 (1951).
[24] А. М. Яглом, ДАН СССР, **69**, № 6 (1949).
[25] С. И. Кречмер, ДАН СССР, **84**, № 1 (1952).
[26] M. Shiotani, J. Met. Soc. Japan, **33**, № 3 (1955).
[27] M. Shiotani, J. Met. Soc. Japan, **31**, № 10 (1953).

[28] B. McCready, J. of Meteorol., № 6 (1953).
[29] E. K. Webb, Tech. Pap. CSIRO, Div. Met. Phys., Melbourne, № 5 (1955).
[30] R. I. Taylor, Austral. J. Phys., 8, № 4 (1955).
[31] А. М. Яглом, Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 24 (151), (1954).
[32] А. М. Яглом, Теория вероят. и ее примен., II, 3 (1957).
[33] А. М. Обухов, ДАН СССР, 32 (1941), 22—24.
[34] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5 (1941).
[35] L. Kovaznay, J. Aero Soc. 15 (1948), 745.
[36] W. Heisenberg, Z. Phys. 124 (1948), 628.
[37] C. Weizsäcker, Z. Phys. 124 (1948), 614.
[38] T. Karman, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash., 34 (1948), 530.
[39] S. Goldstein, Proc. Cambr. Phil. Soc., 47 (1951), 554.
[40] I. Ogura, K. Miyakoda, J. Met. Soc., Japan, 31, № 6 (1953).
[41] Дж. Бэтчелор, Теория однородной турбулентности, ИЛ, 1955.
[42] H. A. Panofsky, R. A. McCormick, Quant. J. Roy. Met. Soc., 1954, 546—564.
[43] H. A. Panofsky, Div. Met. Penn. St. Coll. Sci. Rep., № 2 (1953).
[44] Van der L. Hoven, H. A., Panofsky, Div. Met. Penn. St. Univ., Final Rep. 1954.
[45] H. A. Panofsky, Quart. J. Roy. Met. Soc., 1953, 79, 150.
[46] W. C. Swinbank, J. Met., 8, № 3 (1951).
[47] G. K. Batchelor, A. A. Townsend, Proc. Roy. Soc. A, 1949, 199, 238.
[48] H. E. Cramer, F. A. Record, J. Met., 12, № 2 (1955).
[49] А. М. Обухов, ДАН СССР, 66, № 1 (1949).
[50] А. М. Обухов, А. М. Яглом, Прикл. матем. и мех., XV, вып. 1 (1951).
[51] E. Jnoue, Geoph. Not. Tokyo Univ., 3, № 33 (1950).
[52] G. K. Batchelor, Proc. Cambr. Phil. Soc., 1951, 47, 359.
[53] А. М. Яглом, ДАН СССР, 67, № 5 (1949).
[54] L. Richardson, Proc. Roy. Soc., A, 110 (1926).
[55] H. Stommel, J. Marine Res., 8, № 3 (1949).
[56] G. K. Batchelor, Quart. J. Roy. Met. Soc., 1950, 76, 133.
[57] G. K. Batchelor, Proc. Cambr. Phil. Soc., 1952, 48, 345.
[58] А. С. Монин, ДАН СССР, 105, № 2 (1956).
[59] А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3 (1956).
[60] F. N. Frenkiel, Adv. in Appl. Mech., 1953, 3, 61.
[61] G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc., 1921, 20, 196.
[62] E. Inoue, J. Mat. Soc. Japan, 1950, 28, 441; 1951, 29, 32.
[63] G. K. Batchelor, Proc. Roy. Soc., A, 213, 1952, 349.
[64] В. М. Бовшеверов, В. А. Красильников, ДАН СССР, 32, № 7 (1941).
[65] В. А. Красильников, ДАН СССР, 46, № 3 (1945).
[66] В. А. Красильников, ДАН СССР, 47, № 7 (1945).
[67] В. А. Красильников, ДАН СССР, 58, № 7 (1947).
[68] В. А. Красильников, ДАН СССР, 88, № 4 (1953).
[69] В. А. Красильников, К. М. Иванов-Шиц, ДАН СССР, 67, № 4 (1949).
[70] В. А. Красильников, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1 (1949).
[71] В А. Красильников, ДАН СССР, 65, № 3 (1949).
[72] И. Г. Колчинский, Астр. журнал, 29, № 3 (1952).
[73] M. Minnaert, J. Houtgast, Z. f. Astrophys., 1935, 10, 42.
[74] E. C. S. Megaw, Quart. J. Roy. Met. Soc., 1954, 248, 80, № 344.
[75] H. Siedentopf, F. Wisshak, Optik, 3, № 5—6 (1948).
[76] А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2 (1953).
[77] А. М. Обухов, ДАН СССР, 30, № 7 (1941).
[78] C. L. Pekeris, Phys. Rev., 71, 4 (1947), 268—269.
[79] А. А. Чернов, ДАН СССР, 98, № 6 (1954).
[80] В. А. Красильников, В. И. Татарский, ДАН СССР, 90, № 2 (1953).
[81] В. И. Татарский, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3 (1953).
[82] В. И. Татарский, ДАН СССР, 107, № 2 (1956).
[83] В. А. Красильников, А. М. Обухов, Акуст. журнал, II, вып. 2 (1956).

THE STRUCTURE OF ATMOSPHERIC TURBULENCE

A. S. MONIN (*MOSCOW*)

(Summary)

Theoretical and experimental data are given for the statistical characteristics of random fields of wind velocity and turbulent fluctuations of temperature in the lowest layer of the atmosphere. Fluctuations are considered at one and two space time points. Probability distributions, moments, autocorrelation and structure functions, spectra and cross-spectra are studied. Some dimensionless characteristics (universal functions) are determined by means of Kolmogoroff's similarity theory for small eddies and similarity theory for fully developed turbulence proposed by Oboukhoff and Monin. In addition a short summary is given of works on pressure fluctuations, turbulent accelerations, turbulent diffusion and also on the problem «fluctuations and waves».

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том III Выпуск 3
1958

СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

1. Известная теорема Нэша [1], устанавливающая существование ситуаций равновесия для конечных некооперативных игр, не приводит к какому-либо алгорифму для их отыскания. Для случая нулевых игр двух лиц (такие игры называются часто матричными) алгоритм, позволяющий описать все ситуации равновесия (седловые точки) был указан Шепли и Сноу [2].

В настоящей статье приводится способ описания всех ситуаций равновесия в конечных некооперативных ненулевых играх двух лиц. Такие игры естественно называть *биматричными*, потому что задание каждой такой игры сводится к заданию двух матриц A и B одинаковой формы:

$$A = \| a_{ij} \|, B = \| b_{ij} \| \quad (i = 1,..., m;\ j = 1,..., n).$$

Процесс же игры состоит в независимом выборе первым игроком значения i, а вторым игроком — значения j, после чего первый игрок получает выигрыш a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Биматричную игру с матрицами выигрышей A и B естественно обозначать $\Gamma_{(A,B)}$. Мы будем обозначать ее просто Γ, так как опускание индексов к недоразумениям не приведет.

2. Если M — некоторая матрица, то будем обозначать:

$M_{i\cdot}$ — i-ую строку матрицы M;

$M_{\cdot j}$ — j-ый столбец M;

M^T — транспонированную к M матрицу;

M_+ — матрицу, получаемую из M приписыванием к ней справа столбца, состоящего из единиц. Этот столбец будем обозначать $M_{\cdot 0}$;

J_m — m-мерный вектор, все компоненты которого равны единице;

O_m — m-мерный вектор, все компоненты которого равны нулю;

E_m — единичную матрицу порядка m.

3. Номера i строк матриц A и B называются *чистыми стратегиями* первого игрока, а номера j столбцов этих матриц — чистыми стратегиями второго игрока. Пары вида (i, j) называются *ситуациями в чистых стратегиях* игры Γ. Числа a_{ij} и b_{ij} называются соответственно выигрышами первого и второго игроков в ситуации (i, j).

Множество всех k-мерных векторов $Z = (z_1,..., z_k)$, для которых $z_p \geqslant 0$ $(p = 1,...,k)$ и $\sum_{p=1}^{k} z_p = 1$, будем обозначать S_k. Очевидно, S_k является $k-1$-мерным симплексом в пространстве всех k-мерных векторов.

Всякий m-мерный вектор $X=(x_1,\ldots,x_m)\in S_m$ называется (смешанной) *стратегией* первого игрока, а всякий n-мерный вектор $Y=(y_1,\ldots,y_n)\in S_n$ — (смешанной) стратегией второго.

Пара векторов (X, Y), где $X\in S_m$, а $Y\in S_n$ называется *ситуацией* игры Г. *Выигрышами* первого и второго игроков в ситуации (X,Y) называются соответственно числа XAY^T и XBY^T.

Ситуация (X, Y) игры Г называется *ситуацией равновесия* этой игры, если $XAY^T\geqslant X^*AY^T$, $XBY^T\geqslant XBY^{*T}$ для любых стратегий X^* и Y^* первого и второго игроков. Множество всех ситуаций равновесия в игре Г будем обозначать $\mathfrak{S}_\Gamma$.

Легко показать, что для того, чтобы $(X, Y)\in\mathfrak{S}_\Gamma$, необходимо и достаточно, чтобы

$$XAY^T\geqslant A_{i\cdot}Y^T\quad(i=1,\ldots,m),$$

$$XBY^T\geqslant XB_{\cdot j}\quad(j=1,\ldots,n).$$

Если X — стратегия первого игрока, и существует такая стратегия Y второго игрока, что $(X,Y)\in\mathfrak{S}_\Gamma$, то стратегия X называется *равновесной*. Аналогично определяется равновесная стратегия второго игрока.

4. Пусть Y — стратегия второго игрока. Обозначим $\mathfrak{S}(Y)$ множество всех таких равновесных стратегий U первого игрока, что $(U, Y)\in\mathfrak{S}_\Gamma$. Аналогично для любой стратегии X первого игрока обозначим $\mathfrak{S}(X)$ множество всех таких равновесных стратегий V второго игрока, для которых $(X, V)\in\mathfrak{S}_\Gamma$. Очевидно, для того, чтобы $X\in\mathfrak{S}(Y)$, необходимо и достаточно, чтобы $Y\in\mathfrak{S}(X)$.

Лемма. *Множества $\mathfrak{S}(X)$ и $\mathfrak{S}(Y)$ при любых равновесных стратегиях X и Y первого и второго игроков являются непустыми, выпуклыми, замкнутыми и ограниченными.*

Доказательство. Пусть Y есть равновесная стратегия. Это значит, что существует такая стратегия X первого игрока, что $(X, Y)\in\mathfrak{S}_\Gamma$. Но тогда, по определению, и $X\in\mathfrak{S}(Y)$, так что $\mathfrak{S}(Y)\neq\Lambda$. Ограниченность $\mathfrak{S}(Y)$ вытекает из ограниченности множества S_m всех стратегий первого игрока, содержащего $\mathfrak{S}(Y)$.

Если X_1, $X_2\in\mathfrak{S}(Y)$ и $X'=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$, $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, то $X'AY^T=\lambda X_1AY^T+(1-\lambda)X_2AY^T$. Но $X_1AY^T\geqslant A_{i\cdot}Y^T$, $X_2AY^T\geqslant A_{i\cdot}Y^T$ $(i=1,\ldots,m)$, так что

$$X'AY^T\geqslant A_{i\cdot}Y^T\quad(i=1,\ldots,m).\tag{1}$$

Аналогично получаем, что

$$X'BY^T\geqslant X'B_{\cdot j}\quad(j=1,\ldots,n),\tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что $(X',Y)\in\mathfrak{S}_\Gamma$, так что

$$X'\in\mathfrak{S}(Y).\tag{3}$$

Наконец, если $X_1, X_2,\ldots$ — последовательность элементов $\mathfrak{S}(Y)$, сходяща-

яся к X', то, переходя в неравенствах

$$X_k A Y^T \geqslant A_i . Y^T \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$X_k B Y^T \geqslant X_k B_{.j} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

к пределу по k при $k \to \infty$, мы получаем (1) и (2), откуда следует, что $(X', Y) \in \mathfrak{S}_\Gamma$, т. е. (3).

Следствие. *Каково бы ни было множество $\mathcal{Y}$ равновесных стратегий второго игрока, множество*

$$\mathfrak{S}(\mathcal{Y}) = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} \mathfrak{S}(Y)$$

является выпуклым, замкнутым и ограниченным.

Если множество $\mathfrak{S}(\mathcal{Y})$ непусто, то, как известно (см., напр., [3]), оно имеет крайние точки, т. е. точки, не являющиеся срединами отрезков, лежащих в $\mathfrak{S}(\mathcal{Y})$.

Множество всех крайних точек множества M будем обозначать $K(M)$.

5. Пусть Γ — биматричная игра с матрицами выигрышей A и B соответственно для первого и второго игроков.

Пусть далее $\mathfrak{R} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ — некоторое конечное множество ситуаций равновесия Γ с одной и той же стратегией первого игрока, т. е. $R_\varkappa = (X, Y_\varkappa)$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$.

Заметим сразу, что по определению ситуации равновесия для любых $\varkappa'$ и $\varkappa''$

$$X B Y_{\varkappa'}^T \geqslant X B Y_{\varkappa''}^T,$$

откуда следует, что во всех ситуациях равновесия из $\mathfrak{R}$ выигрыш второго игрока не зависит от $\varkappa$. Мы будем обозначать его χ.

Разобьем стратегии первого игрока на два класса: $\mathfrak{R}_1^1$ и $\mathfrak{R}_1^2$, положив $i \in \mathfrak{R}_1^1$, если $x_i > 0$, $i \in \mathfrak{R}_1^2$, если $x_i = 0$.

Как известно (см., напр., [1]), при $i \in \mathfrak{R}_1^1$ должно быть

$$A_i . Y_\varkappa^T = X A Y_\varkappa^T \quad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Разобьем далее стратегии второго игрока на три класса: $\mathfrak{R}_2^1$, $\mathfrak{R}_2^2$ и $\mathfrak{R}_2^3$ следующим образом.

Положим

$$j \in \mathfrak{R}_2^1, \tag{4}$$

если $y_j > 0$, хотя бы при одном $\varkappa = 1, \ldots, k$

Будем считать, далее, что $j \in \mathfrak{R}_2^2$, если $X B_{.j} = \chi$. (5)

Положим, наконец, $j \in \mathfrak{R}_2^3$, если $X B_{.j} < \chi$. (6)

В случае (4), очевидно, должно выполняться (5), а в случае (6) $y_{\varkappa j} = 0$ для любого $\varkappa = 1, \ldots, k$.

Обозначим B'_j вектор $(b_{i_1 j}, \ldots, b_{i_q j})$, где $i_1 < \ldots < i_q$, и $\{i_1, \ldots, i_q\} = \mathfrak{R}_1^1$.

Множество $\mathfrak{R}_2$ чистых стратегий второго игрока назовем $\mathfrak{R}$-*отмеченным*, если

1) $\mathfrak{R}_2^1 \subset \mathfrak{R}_2$;

2) $\mathfrak{R}_2^3 \cap \mathfrak{R}_2 = \Lambda$;

3) Если $j \in \mathfrak{R}_2^2 \cap \mathfrak{R}_2$, то вектор B'_j не зависит линейно от векторов вида B'_β, где $\beta \in \mathfrak{R}_2$ и $\beta \neq i$.

Пусть $\mathfrak{R}_2^*$ — какое-либо максимальное (т. е. не содержащееся ни в каком другом большем) $\mathfrak{R}$-отмеченное множество стратегий второго игрока.

Подматрицу матрицы A (равно как и подматрицу матрицы B), образованную элементами, стоящими на пересечениях строк с номерами из $\mathfrak{R}_1^1$ и столбцов с номерами из $\mathfrak{R}_2^*$, будем называть $\mathfrak{R}$-*допустимой подматрицей* матрицы A (соответственно, матрицы B).

Если $X(Y)$ — стратегия первого (второго) игрока, а C — подматрица A или B, то под X_C (соответственно Y_C) будем понимать вектор, получаемый из X (из Y) оставлением в нем только тех компонент, которые соответствуют строкам (столбцам), участвующим в образовании подматрицы C.

Очевидно, если C и D являются $\mathfrak{R}$-допустимыми подматрицами матриц A и B, то

$$A_{i\cdot} Y_x^T = C_{i\cdot} Y_{cx}^T \quad (i = 1,\ldots,m), \qquad XB_{\cdot j} = X_D D_{\cdot j} \quad (j = 1,\ldots,n).$$

6. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{R} = \{X, Y_1),\ldots, (X, Y_k)\} \subset \mathfrak{S}_\Gamma$.
Тогда для

$$X \in K\left(\bigcap_{x=1}^{k} \mathfrak{S}(Y_x)\right) \tag{7}$$

необходимо, чтобы для всякой $\mathfrak{R}$-*допустимой подматрицы* D *матрицы* B *матрица* D_+ *имела линейно независимые строки.*

Доказательство. Пусть выполняется (7) и D — одна из $\mathfrak{R}$-допустимых подматриц B, а $\mathfrak{R}_2^*$ — множество номеров столбцов матрицы B, участвующих в образовании D (множество номеров соответствующих строк, очевидно, есть $\mathfrak{R}_1^1$). Пусть D имеет s строк и t столбцов.

Предположим, что строки матрицы D_+ линейно зависимы. Это означает, что существует такой ненулевой вектор $G_D = (\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s})$, что

$$\sum_{i \in \mathfrak{R}_1^1} \gamma_i D_{+i\cdot} = O_t. \tag{8}$$

Полагая далее

$$\gamma_i = 0 \quad \text{для} \quad i \in \mathfrak{R}_1^2, \tag{9}$$

введем в рассмотрение вектор $G = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$.

Соотношение (8) может быть переписано как

$$\sum_{i \in \mathfrak{R}_1^1} \gamma_i b_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad j \in \mathfrak{R}_2^*, \tag{10}$$

$$\sum_{i \in \mathfrak{R}_1^1} \gamma_i = 0, \tag{11}$$

а ввиду (9) должно выполняться и

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 0. \tag{12}$$

Составим теперь для любого вещественного α вектор $X_\alpha = X + \alpha G$. Поскольку вектор G ненулевой, $X_{\alpha_1} \neq X_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Ввиду (12) мы имеем:

$$X_\alpha J_m^T = XJ_m^T + \alpha G J_m^T = 1 + \alpha \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1. \tag{13}$$

Кроме того, из (9) вытекает, что при $x_i = 0$ всегда $\gamma_i = 0$. Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом α, для которого $|\alpha| < \varepsilon$, компоненты вектора X_α неотрицательны. Вместе с (13) это дает, что $X_\alpha \in S_m$, при достаточно малом α, т. е. X_α является некоторой стратегией первого игрока.

Покажем, что $X_\alpha \in S(Y_\varkappa)$ для любого $\varkappa = 1, \ldots, k$.

Действительно,

$$X_\alpha A Y_\varkappa^T = XAY_\varkappa^T + \alpha G A Y_\varkappa^T = XAY_\varkappa^T + \alpha \sum_{i=1}^{m} \gamma_i A_{i\cdot} \boldsymbol{Y}_\varkappa^T,$$

или, ввиду (9),

$$X_\alpha A Y_\varkappa^T = XAY_\varkappa^T + \alpha \sum_{i \in \mathfrak{N}_1^1} \gamma_i A_{i\cdot} Y_\varkappa^T.$$

Но $A_{i\cdot} Y_\varkappa^T = XAY_\varkappa^T$ при $i \in \mathfrak{N}_1^T$ для любого $\varkappa = 1, \ldots, k$. Поэтому

$$X_\alpha A Y_\varkappa^T = XAY_\varkappa^T + \alpha XAY_\varkappa^T \sum_{i \in \mathfrak{N}_1^1} \gamma_i.$$

На основании (11) стоящая справа сумма равна нулю, так что $X_\alpha A Y_\varkappa^T = XAY_\varkappa^T$, а потому, поскольку $(X, Y_\varkappa)$ является ситуацией равновесия,

$$X_\alpha A Y_\varkappa^T \geqslant A_{i\cdot} Y_\varkappa^T \quad \text{для } i = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Далее,

$$X_\alpha B Y_\varkappa^T = XBY_\varkappa^T + \alpha G B Y_\varkappa^T = XBY_\varkappa^T + \alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_i b_{ij} y_{\varkappa j}.$$

Учитывая, что $y_{\varkappa j} = 0$ при $j \notin \mathfrak{N}_2^*$, и принимая во внимание (9), мы можем написать

$$X_\alpha B Y_\varkappa^T = XBY_\varkappa^T + \alpha \sum_{i \in \mathfrak{N}_1^1} \sum_{j \in \mathfrak{N}_2^*} \gamma_i b_{ij} y_{\varkappa j} = XBY_\varkappa^T + \alpha \sum_{j \in \mathfrak{N}_2^*} y_{\varkappa j} \sum_{i \in \mathfrak{N}_1^1} \gamma_i b_{ij}.$$

Ввиду (10) все внутренние суммы справа обращаются в нуль, и мы имеем

$$X_\alpha B Y_\varkappa^T = XBY_\varkappa^T. \tag{15}$$

Кроме того,

$$X_\alpha B_{\cdot j} = XB_{\cdot j} + \alpha G B_{\cdot j} \tag{16}$$

Но вектор G_D ортогонален всем векторам $B'_{\cdot j}$ при $j \in \mathfrak{R}_2^*$. Значит, он должен быть ортогонален и любой линейной комбинации этих векторов, и в том числе всем векторам $B'_{\cdot j}$ при $j \in \mathfrak{R}_2^2$.

Следовательно,

$$GB_{\cdot j} = G_D B'_{\cdot j} = 0 \quad \text{при } j \in \mathfrak{R}_2. \tag{17}$$

Из (16), (10) и (17) следует, что

$$X_\alpha B_{\cdot j} = XB_{\cdot j} \text{ для } j \in \mathfrak{R}_2^1 \cup \mathfrak{R}_2^2. \tag{18}$$

В свою очередь из (18) вытекает, что

$$X_\alpha B_{\cdot j} = \chi \text{ для } j \in \mathfrak{R}_2^1 \cup \mathfrak{R}_2^2. \tag{19}$$

Наконец, $XB_{\cdot j} < \chi$ при $j \in \mathfrak{R}_2^3$.

Значит, ввиду (16) при достаточно малом по абсолютной величине α должно быть и

$$X_\alpha B_{\cdot j} < \chi \text{ для } j \in \mathfrak{R}_2^2. \tag{20}$$

Сопоставляя теперь (15), (19) и (20), мы получаем, что

$$X_\alpha B Y_\varkappa^T \geqslant X_\alpha B_{\cdot j} \text{ для } j = 1, \ldots, n$$

при всех $\varkappa = 1, \ldots, k$.

Вместе с (14) это дает нам, при достаточно малом значении α

$$(X_\alpha, Y_\varkappa) \in \mathfrak{S}_\Gamma \text{ для } \varkappa = 1, \ldots, k,$$

т. е.

$$X_\alpha \in \bigcap_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{S}(Y_\varkappa).$$

Но $X = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha})$, так что в этом случае

$$X \notin K\left(\bigcap_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{S}(Y_\varkappa)\right),$$

что противоречит предположению.

7. Равновесную стратегию X первого игрока назовем *крайней*, если существует такое непустое конечное множество равновесных стратегий $Y_1, \ldots, Y_k$ второго игрока, что

$$X \in K\left(\bigcap_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{S}(Y_\varkappa)\right). \tag{21}$$

Аналогично определяются крайние стратегии второго игрока.

Теорема. *Первый и второй игроки в биматричной игре имеют конечное число крайних стратегий каждый.*

Доказательство. Пусть X — крайняя стратегия первого игрока в игре Γ. Назовем X *крайней стратегией первого рода*, если существует такое конечное множество стратегий $\mathfrak{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ второго игрока, что

выполняется (21) и при $\mathfrak{R} = \{(X, Y_1), \ldots, (X, Y_h)\}$ хотя бы одна $\mathfrak{R}$-допустимая подматрица матрицы B имеет линейно независимые строки. Все остальные крайние стратегии первого игрока назовем его *крайними стратегиями второго рода.*

Рассмотрим сначала случай, когда X является крайней стратегией первого рода.

Пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$, $\mathfrak{R} = \{(X, Y_1), \ldots, (X, Y_h)\}$, $X \in K(\mathfrak{S}(\mathcal{Y}))$, и D есть $\mathfrak{R}$-допустимая подматрица B, имеющая линейно независимые строки. Пусть D имеет s строк. Как известно, в этом случае матрица D обладает квадратной невырожденной подматрицей ранга s. Пусть D^* — одна из таких подматриц. Для определенности будем считать, что матрица D^* расположена в левом верхнем углу матрицы B.

Очевидно, прибавление ко всем элементам любой из матриц выигрышей биматричной игры произвольного вещественного числа не изменяет множества $\mathfrak{S}_\Gamma$. Поэтому, не нарушая общности, мы можем все элементы матрицы B считать положительными.

Положим $XBY_\varkappa^T = \chi_0$. Как было замечено в предыдущем пункте $XBY_\varkappa^T$ не зависит от $\varkappa$. Ввиду предположенной положительности элементов матрицы $\chi_0 \neq 0$. Мы имеем

$$X_D D_{\cdot j} = X_D D^*_{\cdot j} = XB_{\cdot j} = \chi_0$$

для всех столбцов $D^*_{\cdot j}$ матрицы D^*. Значит, $X_D D^* = \chi_0 J_s$.
Но матрица D^* имеет обратную, так что

$$X_D = X_D E_s = X_D D^* (D^*)^{-1} = \chi_0 J_s (D^*)^{-1}. \tag{22}$$

Следовательно, умножая справа на J_s^T, находим

$$1 = \chi_0 J_s (D^*)^{-1} J_s^T,$$

откуда

$$\chi_0 = \frac{1}{J_s (D^*)^{-1} J_s^T}$$

и, подставляя найденное значение для χ_0 в (22), получаем

$$X_D = \frac{J_s (D^*)^{-1}}{J_1 (D^*)^{-1} J_s^T}. \tag{23}$$

Таким образом крайняя стратегия первого рода X вполне определяется подматрицей D^*.

m-мерный вектор X, для которого X_D удовлетворяет условию (23) при некоторой подматрице D^* матрицы B, а не входящие в X_D компоненты X являются нулями, будем обозначать $X(D^*)$. Среди векторов вида $X(D^*)$ находятся все крайние стратегии первого игрока первого рода. А так как B содержит вообще лишь конечное число подматриц, то и крайних стратегий первого рода может быть лишь конечное число.

Обратимся теперь к случаю, когда X является крайней стратегией второго рода. Это значит, что каково бы ни было конечное множество стратегий $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ второго игрока, для которого выполняется (21),

ни одна из $\mathfrak{R}$-допустимых подматриц $D(\mathfrak{R} = \{(X, Y_1), \ldots, (X, Y_k)\})$ не имеет линейно независимых строк.

Но по доказанному в предыдущем пункте, строки матрицы D_+ все-таки являются линейно независимыми. Поэтому, если D_+ имеет s строк, то в D_+ существуют квадратные невырожденные подматрицы ранга s. Пусть D^* — одна из таких подматриц. Очевидно, одним из столбцов матрицы должен быть $D_{\cdot 0}$, так как иначе стратегия X была бы крайней стратегией первого рода. Будем снова для определенности считать, что матрица D лежит в левом верхнем углу B, а матрица D^* составлена из первых s столбцов матрицы D_+.

По-прежнему мы имеем $X_D D^*_{\cdot j} = \chi_0$ $(j = 1, \ldots, s-1)$.

Кроме того,

$$X_D D_{\cdot 0} = X_D J_s^T = \sum_{i \in \mathfrak{R}_1^1} x_i = 1.$$

Поэтому

$$X_D D^* = (1, \chi_0, \ldots, \chi_0),$$

где справа стоит s-мерный вектор. Отсюда мы выводим, что

$$X_D = X_D E_s = X_D D^* (D^*)^{-1} = (1, \chi_0, \ldots, \chi_0)(D^*)^{-1}. \tag{24}$$

Обозначая верхнюю строку $(D^*)^{-1}$ через $(D^*)_{0\cdot}^{-1}$, а матрицу, получаемую в результате удаления из $(D^*)^{-1}$ этой строки, через $(D^*)_{-}^{-1}$, формулу (24) переписываем так:

$$X_D = (D^*)_{0\cdot}^{-1} + \chi_0 J_{s-1} (D^*)_{-}^{-1}. \tag{25}$$

Обозначим $X(D^*, \chi)$ такой m-мерный вектор, для которого

$$X_D(D^*, \chi) = (D^*)_{0\cdot}^{-1} + \chi J_{s-1} (D^*)_{-}^{-1}, \tag{26}$$

а остальные компоненты, не соответствующие строкам из D, являются нулями.

Заметим, что для любого χ и $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$X(D^*, \chi) B Y_\varkappa^T = X_D(D^*, \chi) D Y_{\varkappa D}^T =$$

$$= ((D^*)^{-1} + \chi J_{s-1} (D^*)_{-}^{-1}) D Y_{\varkappa D}^T = (D^*)_{0\cdot}^{-1} D Y_{\varkappa D}^T + \chi J_{s-1} (D^*)^{-1} D Y_{\varkappa D}^T. \tag{27}$$

Вектор $(D^*)_{0\cdot}^{-1}$ ортогонален всем столбцам матрицы D^* за исключением $D^*_{\cdot 0}$. Кроме того, каждый столбец $D_{\cdot l}$ матрицы D, не вошедший в D^*, должен являться линейной комбинацией столбцов матрицы D^*. Действительно, столбец $D_{\cdot l}$ есть во всяком случае, линейная комбинация столбцов матрицы D_+:

$$D_{\cdot l} = \alpha_{0l} D^*_{\cdot 0} + \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_{jl} D^*_{\cdot j}, \tag{28}$$

где не все коэффициенты равны нулю.

Если при этом $\alpha_{0l} \neq 0$, то столбец $D_{\cdot 0}$ матрицы D_+ можно представить как линейную комбинацию столбцов D, так что ранги D и D_+ будут одинаковыми и равными s. А так как D имеет s строк, то эти строки окажутся линейно независимыми, что противоречит определению крайней стратегии второго рода. Значит $\alpha_{0l} = 0$. Поэтому вектор $(D^*)_{0\cdot}^{-1}$ ортогонален всем столбцам матрицы D. Следовательно,

$$(D^*)_{0\cdot}^{-1} D Y_D^T = 0. \qquad (29)$$

Далее, так как в образовании матрицы D участвуют только столбцы с номерами из первых двух классов, $\mathfrak{R}_2^1$ и $\mathfrak{R}_2^2$, то $XD_{\cdot j} = \chi_0$ для всех столбцов D. Умножая (28) слева на X и учитывая при этом, что $\sigma_{0l} = 0$, мы получаем

$$\chi_0 = \chi_0 \sum_{j=1}^{s} \alpha_{jl}.$$

А поскольку $\chi_0 \neq 0$, то

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{jl} = 1. \qquad (30)$$

Обозначим $\widetilde{D}$ матрицу, получаемую из D удалением из нее всех столбцов, участвующих в образовании матрицы D^* и $\overline{D}$ — матрицу, получаемую из D удалением подматрицы $\widetilde{D}$. Тогда*

$$(D^*)_{\cdot}^{-1} D = (D^*)_{\cdot}^{-1} (\overline{D}, \widetilde{D}) = ((D^*)_{\cdot}^{-1} \overline{D},\ (D^*)_{\cdot}^{-1} \widetilde{D}).$$

Матрица $\overline{D}$ является обратной к $(D^*)_{\cdot}^{-1}$, ибо $(D^*)^{-1}$ обратна к D^*. Значит, $(D^*)_{\cdot}^{-1} \overline{D} = E_{s-1}$. Сумма элементов каждого столбца последней матрицы, очевидно, равна единице.

Рассмотрим теперь произведение $(D^*)_{\cdot}^{-1} \widetilde{D}$. Элемент d_{il}, стоящий на пересечении i-ой строки и l-го столбца этого произведения, очевидно, определяется как $d_{il} = (D^*)_{i\cdot}^{-1} \widetilde{D}_{\cdot l}$, или, ввиду (28) и, принимая во внимание, что $d_{0l} = 0$ для любого l,

$$d_{il} = \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_{jl} (D^*)_{i\cdot}^{-1} \overline{D}_{\cdot j} = \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_{jl} \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Ввиду (30) мы имеем для каждого l

$$\sum_{i=1}^{s-1} d_{il} = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_{jl} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_{jl} \sum_{i=1}^{s-1} \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_{jl} = 1.$$

Таким образом сумма элементов каждого столбца матрицы $(D^*)_{\cdot}^{-1} D$ равна единице. Следовательно,

$$J_{s-1} (D^*)_{\cdot}^{-1} D = J_t,$$

где t — число столбцов матрицы D.

* Здесь под (A, B) понимается матрица, получаемая в результате приписывания к матрице A справа матрицы B.

Но $J_t Y_{\varkappa D}^T = 1$, так что, учитывая (29), мы можем переписать (27) как

$$X(D^*, \chi) B Y_{\varkappa}^T = \chi. \tag{31}$$

Выясним теперь, при каких значениях χ

$$X(D^*, \chi) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{Y}). \tag{32}$$

Очевидно, для того, чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы при $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$X_i(D^*, \chi) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad i \in \mathfrak{R}_1^1; \tag{33}$$

$$X_D(D^*, \chi) J_s^T = 1; \tag{34}$$

$$X(D^*, \chi) A Y_{\varkappa}^T \geqslant A_i Y_{\varkappa}^T \text{ для } i = 1, \ldots, m; \text{ при } \varkappa = 1, \ldots, k \tag{35}$$

$$X(D^*, \chi) B Y_{\varkappa}^T \geqslant X(D^*, \chi) B_{\cdot j} \text{ для } j = 1, \ldots, n. \text{ при } \varkappa = 1, \ldots, k \tag{36}$$

Упростим несколько эту систему условий. Заметим, прежде всего, что

$$X_D(D^*, \chi) J_s^T = (D^*)_0^{-1} J_s^T + \chi J_{s-1} (D^*)_-^{-1} J_s^T. \tag{37}$$

Но $J_s^T = D_{\cdot 0}^1$, так что первое слагаемое в (37) справа равно 1. Замечая это и полагая в (37) $\chi = \chi_0$, мы получаем

$$X_D(D^*, \chi_0) J_s^T = 1 + \chi_0 J_{s-1} (D^*)_-^{-1} J_s^T. \tag{38}$$

Но $X(D^*, \chi_0)$ есть стратегия, так что $X_D(D^*, \chi_0) J_s^T = 1$ и, сопоставляя это с (38), мы имеем:

$$\chi_0 J_{s-1} (D^*)_-^{-1} J_s^T = 0,$$

а так как χ_0 по предположению отлично от нуля, то

$$J_{s-1} (D^*)_-^{-1} J_s^T = 0.$$

Значит, соотношение (37) можно переписать как

$$X_D(D^*, \chi) J_s^T = 1.$$

Таким образом равенство (34) выполняется при любом значении χ.

Учитывая, наконец, (31) и определение вектора $X(D^*, \chi)$, мы приходим к следующим необходимым и достаточным условиям выполнения (32):

$$(D^*)_{0i}^{-1} + \chi J_{s-1} (D^*)_{-i}^{-1} \geqslant 0 \text{ для } i = 1, \ldots, s; \tag{39}$$

$$(D^*)_0^{-1} + \chi J_{s-1} (D^*)_-^{-1}) C Y_{C\varkappa}^T \geqslant C_i \cdot Y_{C\varkappa} \text{ для } i = 1, \ldots, m \text{ и } \varkappa = 1, \ldots, k; \tag{40}$$

$$\chi \geqslant ((D^*)_0^{-1} + \chi J_{s-1} (D^*)_-^{-1}) B_{\cdot j} \text{ для } j = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

Обозначим $\mathfrak{H}(D^*)$ множество тех значений χ, при которых выполняются все условия (39) и (41). Это множество, как легко видеть, является сегментом (может быть, стягивающимся в точку). Очевидно, для того чтобы имело место (32), нужно, чтобы χ при любом $\varkappa = 1, \ldots, k$ придавало левой части (40) наибольшее значение.

Следовательно, если для всех $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$J_{s-1}(D^*)^{-1} C Y_{C\varkappa}^T \geqslant 0, \tag{42}$$

причем хотя бы для одного значения $\varkappa$ имеет место строгое неравенство, то (32) выполняется лишь при

$$\chi = \max \mathfrak{H}(D^*). \tag{43}$$

Если при $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$J_{s-1}(D^*)^{-1} C Y_{C\varkappa}^T \leqslant 0, \tag{44}$$

причем при некотором значении $\varkappa$ левая часть отлична от нуля, то $X(D^*, \chi) \in \mathfrak{S}(\mathcal{Y})$ лишь при

$$\chi = \min \mathfrak{H}(D^*). \tag{45}$$

Если для $\varkappa = 1, \ldots, k$

$$J_{s-1}(D^*)^{-1} C Y_{C\varkappa}^T = 0, \tag{46}$$

то $X(D^*, \chi) \in \mathfrak{S}(\mathcal{Y})$ при любом $\chi \in \mathfrak{H}(D^*)$.

Наконец, случай, при котором найдутся такие $\varkappa'$ и $\varkappa''$, что $J_{s-1}(D^*)^{-1} C Y_{C\varkappa'}^T > 0$; и $J_{s-1}(D^*)^{-1} C Y_{C\varkappa''}^T < 0$, встретиться не может, так как тогда (32) не имело бы места ни при каких значениях χ, что неверно, ибо при $\chi = \chi_0$ соотношение (32) выполняется.

Поэтому в случае (42) необходимо, чтобы

$$\chi_0 = \max \mathfrak{H}(D^*), \tag{47}$$

а в случае (44) — чтобы

$$\chi_0 = \min \mathfrak{H}(D^*). \tag{48}$$

Если же имеет место случай (46), то для того, чтобы

$$X(D^*, \chi) \in K(\mathfrak{S}(\mathcal{Y})),$$

необходимо, чтобы выполнялось либо (43), либо (45). Действительно, если

$$\min \mathfrak{H}(D^*) < \chi < \max \mathfrak{H}(D^*),$$

то можно найти такой ε, что $\chi - \varepsilon$, $\chi + \varepsilon \in \mathfrak{H}(D^*)$. В рассматриваемом случае

$$X(D^*, \chi - \varepsilon),\ X(D^*, \chi + \varepsilon) \in \mathfrak{S}(\mathcal{Y}).$$

Но

$$\frac{1}{2}(X\ (D^*, \chi - \varepsilon) + X(D^*, \chi + \varepsilon)) = X(D^*, \chi),$$

так что

$$X(D^*, \chi) \notin K(\mathfrak{S}(\mathfrak{Y})).$$

Таким образом в случае (46) должно иметь место (47) или (48). В итоге мы получаем, что для каждой подматрицы D^* может найтись не более двух значений χ, при которых найдутся такие стратегии второго игрока $Y_1, \ldots, Y_k$, что

$$X(D^*, \chi) \in K(\bigcap_{\chi}^{k} \mathfrak{S}(Y_k)).$$

Так как матриц вида D^* можно по матрице B построить лишь конечное число, то и крайних стратегий первого игрока в игре Γ может быть только конечное число.

Конечность числа крайних стратегий второго игрока в биматричной игре следует из симметричности ролей игроков в этой игре.

Этим теорема доказана.

8. Все крайние стратегии первого игрока вида $X(D^*)$, а также все его крайние стратегии вида $X(D^*, \chi)$ (а, согласно только что доказанному, иных стратегий игрок не имеет) могут быть эффективно найдены.

Действительно, достаточно выписать все подматрицы D^* матрицы B, которые либо имеют линейно независимые строки, либо приобретают это свойство в результате приписывания к ним столбца, состоящего из единиц. Для каждой из матриц первого из указанных типов найдем вектор

$$X(D^*) \tag{49}$$

и отберем среди всех найденных так векторов все те, которые являются стратегиями первого игрока (т. е. имеют неотрицательные компоненты, сумма которых равна единице).

Для каждой из матриц второго типа определим множество $X(D^*, \chi)$. Это можно сделать, решив систему, состоящую из неравенств (39) и (41), которая имеет лишь одно неизвестное, и потому решается без труда. Множество $\mathfrak{H}(D^*)$ решений этой системы является сегментом (может быть вырождающимся в точку или даже исчезающим). Если $\mathfrak{H}(D^*)$ пусто, то среди векторов вида $X(D^*, \chi)$ не может быть равновесных стратегий первого игрока. Если же $\mathfrak{H}(D^*) \neq \Lambda$, то возьмем максимальное и минимальное числа в этом сегменте (если $\mathfrak{H}(D^*)$ вырождается в точку, то эти числа, очевидно, совпадают). В итоге мы можем определить стратегии

$$X(D^*, \max \mathfrak{H}(D^*)), \tag{50}$$

и

$$X(D^*, \min \mathfrak{H}(D^*)). \tag{51}$$

Все крайние стратегии первого игрока находятся среди стратегий вида (49), (50) и (51).

Найденное множество стратегий первого игрока обозначим $\mathfrak{X}$. Построенное аналогичным образом множество стратегий второго игрока обозначим $\mathfrak{Y}$.

Множества $\widetilde{\mathfrak{X}}$ и $\widetilde{\mathfrak{Y}}$ непусты. В самом деле по теореме Нэша игра Γ имеет хотя бы одну ситуацию равновесия (X, Y). Следовательно, множества $\mathfrak{S}(X)$ и $\mathfrak{S}(Y)$ непусты, и на основании установленного в п. 4, множества $K(\mathfrak{S}(X))$ и $K(\mathfrak{S}(Y))$ также непусты. Но $K(\mathfrak{S}(X)) \subset \widetilde{\mathfrak{Y}}$, а $K(\mathfrak{S}(Y)) \subset \widetilde{\mathfrak{X}}$.

9. Теорема*.

$$\mathfrak{S}_\Gamma = \bigcup_{\mathfrak{x} \subset \widetilde{\mathfrak{X}}} [\mathfrak{x}] \times \mathfrak{S}(\mathfrak{x}).$$

Доказательство. Пусть $(X, Y) \in \mathfrak{S}_\Gamma$. Тогда $K(\mathfrak{S}(Y)) \subset \widetilde{\mathfrak{X}}$, потому, что множество $\widetilde{\mathfrak{X}}$ содержит все крайние стратегии первого игрока и в том числе все стратегии из $K(\mathfrak{S}(Y))$. Положим $K(\mathfrak{S}(Y)) = \mathfrak{x}$. Тогда $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{S}(Y)$, т. е. любое $X^* \in \mathfrak{x}$ принадлежит $\mathfrak{S}(Y)$. Но тогда и $Y \in \mathfrak{S}(X^*)$ для любого $X^* \in \mathfrak{x}$, т. е. $Y \in \mathfrak{S}(\mathfrak{x})$.

Далее, $X \in \mathfrak{S}(Y)$, а множество $\mathfrak{S}(Y)$ имеет конечное число крайних точек. Поэтому $\mathfrak{S}(Y) = [\mathfrak{x}]$ и, в частности, $X \in [\mathfrak{x}]$. Следовательно, $(X, Y) \in [\mathfrak{x}] \times \mathfrak{S}(\mathfrak{x})$.

Пусть теперь $X \in [\mathfrak{x}]$, $Y \in \mathfrak{S}(\mathfrak{x})$. для некоторого $\mathfrak{x} \subset \widetilde{\mathfrak{X}}$. Тогда $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{S}(Y)$, а ввиду выпуклости $\mathfrak{S}(Y)$ и $[\mathfrak{x}] \subset \mathfrak{S}(Y)$, так что $X \in \mathfrak{S}(Y)$, а это и означает, что $(X, Y) \in \mathfrak{S}_\Gamma$.

10. Для любого $\mathfrak{x} \subset \widetilde{\mathfrak{X}}$ множество $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ может быть эффективно описано.

Действительно, пусть $\mathfrak{x} \subset \widetilde{\mathfrak{X}}$. Если множество $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ непусто, то непустым будет и множество $K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x}))$. Но $K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x})) \subset \widetilde{\mathfrak{Y}}$, следовательно, должна найтись хотя бы одна стратегия $Y \in \widetilde{\mathfrak{Y}}$, для которой $(X, Y) \in \mathfrak{S}_\Gamma$ при всех $X \in \mathfrak{x}$.

Значит, для определения всех стратегий из $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ (и, в частности, для установления возможной пустоты этого множества) достаточно проверить, удовлетворяют ли все элементы $X \in \mathfrak{x}$ системе неравенств

$$XAY^T \geqslant A_i.Y^T, \quad i = 1, \ldots, m \tag{52}$$

$$XBY \geqslant XB._j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{53}$$

хотя бы для одного $Y \in \widetilde{\mathfrak{Y}}$.

Обозначим $\mathfrak{Y}$ множество всех тех Y, для которых выполняются неравенства (49) и (50) при всех $X \in \mathfrak{x}$. Очевидно, что

$$K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x})) \subset \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{S}(\mathfrak{x}).$$

Так как множество $K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x}))$ конечно, то на основании известного свойства выпуклых многогранников (см., напр., [3]) должно быть $\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = [K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x}))]$.

В частности, линейными выпуклыми комбинациями точек из $K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x}))$ должны являться все точки из $\mathfrak{Y}$. Поэтому некрайними из них будут те и только те, которые представим в виде линейной выпуклой комбинации

* Как обычно, $[M]$ обозначает выпуклую оболочку множества M.

остальных:

$$Y = \sum_{\substack{Y' \in \mathfrak{Y} \\ Y' \neq Y}} \xi_{Y'} Y'; \quad \xi_Y \geqslant 0; \quad \sum_{\substack{Y' \in \mathfrak{Y} \\ Y' \neq Y}} \xi_{Y'} = 1.$$

Удаляя все такие стратегии из $\mathfrak{Y}$, мы получим $K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x}))$.

Остается заметить, что конечное множество $K(\mathfrak{S}(\mathfrak{x}))$ вполне описывает множество $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$.

Описание всех множеств вида $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \subset \tilde{\mathfrak{x}}$, приводит на основании теоремы п. 9 к описанию множества $\mathfrak{S}_\Gamma$.

Поступила в редакцию
12. 3. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. F. Nash, Non-cooperative games, Ann. of Math. 54 (1951), 286—295.
[2] L. S. Shapley, R. N. Snow, Basic solutions of discrete games; Contribution to the theory of games I, Princeton (1950), 27—35.
[3] D. Blackwell, M. A. Girshik, Theory of games and statistical decision, New York, 1954.

EQUILIBRIUM POINTS IN BIMATRIX GAMES

N. N. VOROBJEV (*LENINGRAD*)

(Summary)

An algorithm for computing all equilibrium points (situations) for the case of bimatrix (i. e. finite two-person non-cooperative non-zero-sum) games is given.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1958

СЛУЧАЙНАЯ ЗАМЕНА ВРЕМЕНИ В СТРОГО МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ

В. А. ВОЛКОНСКИЙ

§ 1. Формулировка результатов

1. Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями работы Е. Б. Дынкина [7] (см. также [1] и [2]).

Однородный марковский процесс определяется заданием следующих элементов: фазового пространства $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$, пространства элементарных событий Ω, функции $x(t, \omega) = x_t(\omega)$ $(t \geqslant 0,\ \omega \in \Omega,\ x \in \mathcal{E})$ и системы вероятностных мер $P_x(x \in \mathcal{E})$ в пространстве Ω. При этом $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ — произвольное измеримое пространство. Мы будем предполагать, что $\mathcal{E}$ — произвольное метрическое пространство, а $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра всех борелевских множеств в нем. Вероятностные меры P_x определены на σ-алгебре $\mathfrak{M}$, порожденной множествами $\{\omega : x(t, \omega) \in \Gamma\}$ $(t \geqslant 0,\ \Gamma \in \mathcal{B})$. Функция $P_x(x_t \in \Gamma)$ при фиксированных $t \geqslant 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}$ должна быть $\mathcal{B}$-измерима по x, и меры P_x должны удовлетворять следующему условию согласованности (или условию марковости). Обозначим $\mathfrak{M}_\tau$ σ-алгебру, порожденную множествами $\{\omega : x_t \in \Gamma\}$, $t \leqslant \tau$, $\Gamma \in \mathcal{B}$. Условие марковости требует, чтобы для любых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{B}$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и любой положительной постоянной τ с вероятностью 1

$$P_x\{x_{\tau+t_1} \in \Gamma,\ \ldots, x_{\tau+t_n} \in \Gamma_n \mid \mathfrak{M}_\tau\} = P_{x_\tau}(x_{t_1} \in \Gamma_1, \ldots, x_{t_n} \in \Gamma_n). \qquad (1)$$

Будем называть случайную величину $\tau(\omega)$ не зависящей от будущего процесса x_t, если $\tau \geqslant 0$ и $\{\tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$ для любого $t \geqslant 0$. Для величины τ, не зависящей от будущего, определим σ-алгебры $\mathfrak{M}_\tau$ и $\mathfrak{M}^\tau$: 1) $\mathfrak{M}_\tau$ — совокупность множеств A, для которых $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathfrak{M}_t$ при любом постоянном $t \geqslant 0$, 2) $\mathfrak{M}^\tau$ есть σ-алгебра, порожденная множествами $\{\omega : x(\tau(\omega) + h, \omega) \in \Gamma\}$ $(h \geqslant 0,\ \Gamma \in \mathcal{B})$. Процесс x_t называется строго марковским, если (1) выполняется не только для любой постоянной, но и для любой случайной величины τ, не зависящей от будущего.

Не ограничивая существенно общности, можно считать, что пространство элементарных событий Ω удовлетворяет условию: для любых $\omega \in \Omega$, $h \geqslant 0$ найдется такое $\omega' \in \Omega$, что $x(t + h, \omega) = x(t, \omega')$ для всех $t \geqslant 0$. Элемент ω' определяется по ω, вообще говоря, неоднозначно. Однако, если $\zeta(\omega)$ есть $\mathfrak{M}$-измеримая функция, то, как нетрудно показать, $\zeta(\omega')$ есть однозначная функция от ω. Мы будем обозначать эту функцию $\theta_h\zeta$. Если

$\tau = \tau(\omega)$ — произвольная неотрицательная случайная величина, то мы определяем функцию $\eta = \theta_\tau \zeta$ равенством $\eta(\omega) = \theta_h \zeta(\omega)$ на тех ω, для которых $\tau = h$. Доказывается, что если x_t есть строго марковский процесс, то для любой случайной величины τ, не зависящей от будущего, и любой $\mathfrak{M}$-измеримой функции ζ

$$M_x(\theta_\tau \zeta \mid \mathfrak{M}_\tau) = M_{x_\tau} \zeta$$

для почти всех ω (см. [1]).

Условимся писать $B = \theta_\tau A$, если $\chi_B = \theta_\tau \chi_A$ (χ_A означает функцию, равную 1 на A и 0 вне A).

Пусть $x(t, \omega)$ $(t \geqslant 0,\ \omega \in \Omega)$ однородный строго марковский процесс в метрическом измеримом пространстве $(\mathcal{E}, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра всех борелевских множеств. И пусть $\tau_t(\omega)$ — функция, не убывающая по t при всех ω и такая, что $\tau_t(\omega)$ при каждом t есть случайная величина, не зависящая от будущего. Функцию $y(t, \omega) = x(\tau_t(\omega), \omega)$ мы будем называть процессом, полученным из процесса x_t путем случайной замены времени τ_t. Мы исследуем условия, при которых этот процесс является также марковским или строго марковским и изучим связь между инфинитезимальными операторами процессов x_t и y_t.

В этом параграфе мы изложим результаты, а их доказательства будут приведены в § 2 и 3.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что функции $x_t(\omega)$ и $\tau_t(\omega)$ непрерывны справа по t при всех ω.

Теорема 1. *Если* $\tau_{t+h} - \tau_t = \theta_{\tau_t} \tau_h$, *при любых* t *и* $h > 0$, *то процесс* y_t *— однородный марковский.*

Величины $\varphi(\omega)$, измеримые относительно σ-алгебры, порожденной множествами вида $\{y_t \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, $t \geqslant 0$, мы будем называть величинами, относящимися к процессу y_t. Среди них можно обычным образом выделить величины, не зависящие от будущего процесса y_t. Все величины $\varphi(\omega)$, относящиеся к процессу y_t, являются $\mathfrak{M}$-измеримыми, и величины $\tau_{\varphi(\omega)}(\omega)$ также $\mathfrak{M}^0$-измеримы.

Теорема 2. а) *Если величина* $\varphi(\omega)$ *не зависит от будущего процесса* y_t, *то* $\tau_{\varphi(\omega)}(\omega)$ *не зависит от будущего* x_t.

б) *Если* $\tau_{\varphi+h} - \tau_\varphi = \theta_{\tau_\varphi} \tau_h$ *для любого* $h > 0$ *и любой величины* $\varphi(\omega)$, *не зависящей от будущего процесса* y_t, *то процесс* y_t *— строго марковский.*

Следствие. *Пусть* $\tau_t(\omega)$ *определяется уравнением*

$$\int_0^{\tau_t} \frac{ds}{\varphi(x_s)} = t, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ *— произвольная измеримая ограниченная положительная функция на* $\mathcal{E}$, *и пусть* $\int_0^\infty \frac{ds}{\varphi(x_s)} = \infty$ *для всех* ω.

Тогда $y_t = x(\tau_t)$ *есть непрерывный справа однородный строго марковский процесс.*

В дальнейшем мы будем говорить коротко, что y_t получен из x_t с помощью функции $\varphi(x)$.

2. Мы будем теперь предполагать, что процесс x_t является феллеровским.

В работе [1] каждому феллеровскому процессу сопоставляется оператор $\mathfrak{A}$ (мы будем называть его расширенным инфинитезимальным оператором), который определяется следующим образом:

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{dU \to 0} \frac{M_x f(x(T_u)) - f(x)}{M_x T_u},$$

где U — окрестность точки x, dU — ее диаметр, а T_u — нижняя грань тех моментов времени t, для которых расстояние отрезка траектории $x_s (0 \leqslant s \leqslant t)$ от множества $\mathcal{E} \setminus U$ равно нулю*. При этом областью определения $D_{\mathfrak{A}}$ оператора $\mathfrak{A}$ считается совокупность непрерывных ограниченных функций $f(x)$, для которых $\mathfrak{A}f(x)$ существует для всех $x \in \mathcal{E}$ и является также непрерывной ограниченной функцией. В [1] доказано, что расширенный инфинитезимальный оператор является расширением инфинитезимального оператора A феллеровского процесса x_t и совпадает с ним, если $\mathcal{E}$ компактно.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(x)$ положительная ограниченная непрерывная функция, и τ_t определена равенством* (2). *Если x_t и $y_t = x(\tau_t)$ суть непрерывные справа феллеровские процессы, и если $\mathfrak{A}$ есть расширенный инфинитезимальный оператор процесса x_t, то $\varphi\mathfrak{A}$ есть расширенный инфинитезимальный оператор процесса y_t.*

Два процесса называются стохастически эквивалентными, если их переходные вероятности совпадают.

Следствие. *Если $\mathcal{E}$ компактно, то расширенный оператор $\mathfrak{A}$ процесса x_t совпадает с его инфинитезимальным оператором A, и оператор A определяет процесс с точностью до стохастической эквивалентности* (см. [11]). *В этом случае для любой непрерывной неотрицательной функции $\varphi(x)$ процесс с инфинитезимальным оператором φA с точностью до стохастической эквивалентности совпадает с процессом, полученным из x_t с помощью функции $\varphi(x)$.*

Пример 1. Пусть $\mathcal{E}$ — конечное множество. Тогда процесс x_t характеризуется матрицей плотностей вероятностей перехода $a_{xy}(x, y = 1, \ldots, n)$, и его оператор $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$\mathfrak{A}f(x) = \sum_y a_{xy} f(y).$$

Оператор $\mathfrak{A}$ процесса y_t, полученного из x_t с помощью функции $\varphi(x)$, будет, согласно теореме 3, иметь вид

$$\bar{\mathfrak{A}}f(x) = \sum_y \varphi(x) a_{xy} f(y),$$

и, значит, матрица плотностей вероятностей перехода процесса y_t будет $\bar{a}_{xy} = \varphi(x) a_{xy}$. Как известно, плотности a_{xy} имеют следующий вероятно-

* Будем условно называть величину T_u моментом первого выхода из окрестности U.

стный смысл. Вероятность в момент выхода из состояния x находиться в состоянии $y \neq x$ есть $\frac{a_{xy}}{-a_{xx}}$. Диагональные элементы a_{xx} характеризуют время первого выхода из состояния x, а именно, его плотность распределения есть $-a_{xx}e^{a_{xx}t}$, и математическое ожидание $\frac{1}{-a_{xx}}$. Легко показать, что процесс y_t можно получить из процесса x_t, если установить в каждом состоянии $x \in \mathfrak{E}$ свой индивидуальный отсчет времени, а именно, каждые $\varphi(x)$ единиц исходного времени считать за одну единицу нового «локального» времени.

Точно также изменится при случайной замене времени марковский процесс со счетным множеством состояний, если только этот процесс непрерывен справа в дискретной топологии, т. е. для каждого момента t с вероятностью 1 система еще положительное время не покинет того состояния, в котором находилась в момент t.

3. В этом пункте мы будем рассматривать только непрерывные марковские процессы на прямой, и не будем этого специально оговаривать. Применение случайной замены времени к марковским процессам на прямой особенно интересно, так как здесь эта замена в сочетании с монотонным преобразованием фазового пространства дает способ построения весьма широкого класса марковских процессов, исходя из одного стандартного процесса, например, винеровского. Кроме того, это дает новый способ доказательства теоремы существования марковских процессов, инфинитезимальные операторы которых есть операторы обобщенной второй производной.

Введем некоторые определения. Будем называть процесс регулярным внутри отрезка $[r_1, r_2]$*, если для любых α и β $(r_1 < \alpha < \beta < r_2)$ вероятности попасть в β, выйдя из α, и попасть в α, выйдя из β, положительны (см. [1]).

Пусть процесс x_t регулярен внутри отрезка $[r_1, r_2]$. Будем называть границу r_j достижимой, если для некоторого $x \in (r_1, r_2)$ и ω-множества положительной P_x-меры существуют значения $T_j(\omega) < \infty$ такие, что $x(t, \omega) \to r_j$ при $t \to T_j(\omega)$. Свойство достижимости границы, очевидно, выполняется или не выполняется сразу для всех точек $x(r_1 < x < r_2)$. Под термином отрезок $[r_1, r_2]$ мы будем в дальнейшем понимать открытый интервал (r_1, r_2), дополненный теми из граничных точек, которые достижимы для процесса x_t (недостижимые границы мы не будем считать принадлежащими отрезку). В дальнейшем будем обозначать $T_{(a,b)}(\omega)$ момент первого выхода из интервала (a, b). Будем говорить, что процесс x_t на отрезке $[r_1, r_2]$ есть процесс с поглощением на концах, если $x(t, \omega) = x(T_{(a,b)}(\omega), \omega)$ при $t \geqslant T_{(a,b)}(\omega)$.

Мы будем рассматривать только процессы $x(t, \omega)$ $(x \in [r_1, r_2])$, определенные для всех $\omega \in \Omega$ и $t \geqslant 0$. При этом, конечно, вероятность нахождения системы на отрезке $[r_1, r_2]$ в любой момент времени равна 1.

Каждый непрерывный однородный строго марковский процесс, регуляр-

* Мы будем для краткости называть $[r_1, r_2]$ отрезком и в том случае, когда r_j принимают бесконечные значения.

ный внутри отрезка $[r_1, r_2]$, имеет расширенный инфинитезимальный оператор $\mathfrak{A} = D_v D_u$, где D_u и D_v — операторы дифференцирования относительно строго возрастающих функций $u(t)$ и $v(t)$, причем $u(x)$ непрерывна (см. [1] и [8]).

Инфинитезимальный оператор A такого процесса является сужением оператора $D_v D_u$ согласно условиям на границах

$$\lim_{x \to r_j} [k_j D_u f(x) + s_j D_v D_u f(x)] = 0, \quad j = 1, 2, \tag{3}$$

где константы k_j и s_j удовлетворяют следующим условиям:

1) $(-1)^j k_j$ и s_j неотрицательны.
2) $k_j \neq 0$ только в том случае, если $u(r_j)$ и $v(r_j)$ конечны.
3) Если граница r_j недостижима, то $s_j = k_j = 0$.
4) Если $k_j = s_j = 0$, то граница r_j недостижима *.

Граница r_j достижима тогда и только тогда, когда $\int_{\beta}^{r_j} v(x)\, du(x) < \infty$ для $\beta \in (r_1, r_2)$ (см. [8]).

Теорема 4. *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — любые строго возрастающие на замкнутом отрезке $[r_1, r_2]$ функции, конечные на (r_1, r_2) (в точках r_1 и r_2 функции могут принимать бесконечные значения), и $u(x)$ непрерывна на $[r_1, r_2]$. Отрезком $\mathfrak{E}$ назовем интервал (r_1, r_2), дополненный теми из границ r_j, для которых $u(r_j)$ и $\int_{\beta}^{r_j} v(x)\, du(x)$ $(\beta \in (r_1, r_2))$ конечны.*

*Пусть x_t — винеровский процесс на отрезке $[u(r_1), u(r_2)]$ с отражением на границах, если они конечны, и пусть $v_j(x)$ последовательность неубывающих функций на $[r_1, r_2]$ непрерывно дифференцируемых по $u(x)$ и сходящихся к $v(x)$ в каждой точке непрерывности $v(x)$ на интервале (r_1, r_2) и в тех из точек r_j, которые принадлежат $\mathfrak{E}$ **. Определим величины τ_{tj} из равенства*

$$\int_0^{\tau_{tj}} \frac{dv_j}{du} [u_{-1}(x_s)]\, ds = t \text{ ***}. \tag{4}$$

Тогда

а) $\lim_{j \to \infty} \tau_{tj}$ *существует для любого $t \geqslant 0$ в смысле сходимости по вероятности для всех мер P_x и не зависит от выбора последовательности $v_j(x)$.*

б) *Обозначим*

$$\lim_{j \to \infty} \tau_{tj} = \tau_t. \tag{5}$$

---

* Доказательство этого утверждения будет опубликовано в монографии Е. Б. Дынкина о марковских процессах, которая готовится к печати. Формулировка этого утверждения имеется в докладе Е. Б. Дынкина в трудах 3-го Всесоюзного математического съезда.

** Такую сходимость мы будем обозначать значком $\Longrightarrow$: $v_j \Longrightarrow v$.

*** $u_{-1}(x)$ означает отображение, обратное к $u(x)$.

Процесс

$$y_t = u_{-1}[x(\tau_t(\omega), \omega)] \tag{6}$$

есть строго марковский однородный непрерывный процесс, инфинитезимальный оператор которого есть сужение оператора $D_v D_u$ *на* $\mathfrak{E}$ *с помощью следующих граничных условий на тех из границ* r_j, *которые принадлежат* $\mathfrak{E}$:

$$\lim_{x \to r_j} \{D_u f(x) + [v(r_j) - v(r_j \pm 0)] D_v D_u f(x)\} = 0, \text{ если } |v(r_j)| < \infty, \tag{3'}$$

(*под символом* $v(r_j \pm 0)$ *надо понимать* $v(r_1 + 0)$, *если* $j = 1$, *и* $v(r_2 - 0)$, *если* $j = 2$);

$$D_v D_u f(r_j) = 0, \text{ если } |v(r_j)| = \infty. \tag{3''}$$

Из теоремы 4 легко выводится следующее

Следствие. *Пусть* $x(t, \omega)$ — *винеровский процесс на произвольном отрезке* $[\rho_1, \rho_2]$, *причем, если граница* ρ_j *конечна, то она отражающая для процесса* x_t. *Далее, пусть* $\psi(x)$ — *монотонное непрерывное преобразование* $[\rho_1, \rho_2]$ *в отрезок* $[r_1, r_2]$. *Наконец, пусть* $\tau_t(\omega)$ — *случайная функция, непрерывная, неубывающая для всех* ω, *удовлетворяющая условию б) теоремы 2 и такая, что либо* $\tau_t(\omega) \underset{t \to \infty}{\to} \infty$ *при всех* ω, *либо для каждого* ω *существует* $j(\omega)$ *такое, что* $\tau_t(\omega) \underset{t \to \infty}{\to} T_{r_j}(\omega)$, *где* $T_{r_j}(\omega)$ — *момент первого достижения* r_j.

Тогда класс всех непрерывных однородных строго марковских процессов y_t, *регулярных внутри отрезка* $[r_1, r_2]$, *совпадает с классом процессов* y_t^*, *описываемых формулой*

$$y_t^* = \psi[x(\tau_t)]. \tag{6'}$$

Пример 2. Для диффузионного процесса расширенный оператор есть

$$\mathfrak{A} = D_v D_u = a(x) \frac{d}{dx} + b(x) \frac{d^2}{dx^2}.$$

Как легко вычислить, для такого процесса

$$u(x) = w \int e^{-\int_\beta^x \frac{a(y)}{b(y)} dy} dx, \quad v(x) = \frac{1}{w} \int b^{-1}(x) e^{\int_\beta^x \frac{a(y)}{b(y)} dy} dx,$$

где w — любая положительная константа. Пользуясь этими выражениями, можно найти ψ и выписать уравнение для τ_t согласно теореме 4. Особенно просто записывается уравнение для τ_t при отсутствии переноса, т. е. когда $\mathfrak{A} = b(x) \frac{d^2}{dx^2}$, а именно, $\int_0^{\tau_t} \frac{ds}{b(x_s)} = t$.

Возможность сводить диффузионные процессы к винеровскому с

помощью случайной замены времени была замечена Р. З. Хасьминским (см. [6]).

Пример 3. В частности с помощью случайной замены времени можно получить из винеровского процесса процесс с оператором $D_v D_x$, где $v(x)$ равна сумме своих скачков, расположенных левее x. Как показано Феллером и Мак-Кином в [4], множество точек разрыва функций $v(x)$ является стохастически замкнутым множеством для такого процесса, и поэтому такой процесс по существу является процессом со счетным множеством состояний. При этом ни в одном состоянии, кроме, может быть, концов отрезка, система не будет задерживаться с вероятностью 1 в течение целого отрезка времени ненулевой продолжительности при любом начальном значении.

Исходя из способа построения процесса y_t путем случайной замены времени, можно показать, что для y_t время, проведенное вне точек разрыва $v(x)$ за отрезок времени любой длины c равно нулю с P_x-вероятностью 1 при любом x, а также, что y_t не может оставаться постоянным в течение отрезка времени положительной длины также с вероятностью 1 при любом начальном значении.

Задача, исследованная в этой работе, была поставлена Е. Б. Дынкиным. Им же высказана была основная идея доказательства теоремы 2. Приношу ему глубокую благодарность за руководство и помощь, оказанную при написании этой работы.

§ 2. Доказательство теорем 1—3

Доказательство теоремы 1. а) Рассмотрим для процесса y σ-алгебры $\mathfrak{M}_t$ и $\overline{\mathfrak{M}}^t$, аналогичные $\mathfrak{M}_t$ и $\mathfrak{M}^t$ для процесса x_t*.

Докажем, что $\overline{\mathfrak{M}}_t \subset \mathfrak{M}_{\tau_t}$. Заметим, что $\mathfrak{M}_{\tau_t} \subset \mathfrak{M}_{\tau_{t+h}}$, если $h \geqslant 0$. Действительно, если $A \in \mathfrak{M}_t$, то вследствие неравенства $\tau_t \leqslant \tau_{t+h}$ получаем

$$A \cap \{\tau_{t+h} < u\} = (A \cap \{\tau_t < u\}) \cap \{\tau_{t+h} < u\}.$$

Так как в правой части стоит пересечение двух множеств из $\mathfrak{M}_u$, то левая часть также принадлежит $\mathfrak{M}_u$, т. е. $A \in \mathfrak{M}_{\tau_{t+h}}$. Теперь включение $\overline{\mathfrak{M}}_t \subset \mathfrak{M}_{\tau_t}$ следует из того, что множества вида $\{y_r \in \Gamma\}$, $r \leqslant t$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, порождающие $\overline{\mathfrak{M}}_t$, принадлежат $\mathfrak{M}_{\tau_t}$. (Функция $y_r(\omega) = x(\tau_t(\omega), \omega)$ измерима относительно $\mathfrak{M}_{\tau_r}$, а значит и относительно $\mathfrak{M}_{\tau_t}$, если $r \leqslant t$).

Далее, $\mathfrak{M}^t \subset \mathfrak{M}^{\tau_t}$. Чтобы это доказать, проверяем измеримость y_r при $r \geqslant t$ относительно $\mathfrak{M}^{\tau_t}$. Так как $\tau_r = \tau_t + \theta_{\tau_t}\tau_{r-t}$ и $\theta_{\tau_t}\tau_{r-t}$ является $\mathfrak{M}^{\tau_t}$-измеримой, то достаточно доказать, что $x(\tau_t + h(\omega), \omega)$ $\mathfrak{M}^{\tau_t}$-измерима, если $h(\omega)$ неотрицательна и $\mathfrak{M}^{\tau_t}$-измерима.

Строим последовательность неотрицательных $\mathfrak{M}^{\tau_t}$-измеримых функций $h_k(\omega)$, принимающих счетное число значений, равномерно сходящуюся к $h(\omega)$ при $k \to \infty$. Тогда $x(\tau_t + h_k(\omega), \omega)$, очевидно, $\mathfrak{M}^{\tau_t}$ измеримы**, и

* Черта сверху будет всюду в дальнейшем означать, что данный объект относится к процессу y_t в отличие от соответствующего объекта, относящегося к процессу x_t.

** Действительно, множества $\{h_k(\omega) = \text{const}\}$ принадлежат $\mathfrak{M}^{\tau_t}$ и на них функции $x(\tau_t + h_k, \omega)$ являются $\mathfrak{M}_{\tau_t}$-измеримыми.

$x(\tau_t + h(\omega), \omega) = \lim_{k\to\infty} x(\tau_t + h_k(\omega), \omega)$, т. е. $x(\tau_t + h)$ тоже $\mathfrak{M}^{\tau}{}_t$-измерима.

Заметим, что всякая случайная величина, измеримая относительно $\mathfrak{M}^{\tau}$, может быть представлена в виде $f(x(\tau + h_1), \ldots, x(\tau + h_n), \ldots)$, где $h_k > 0$ для $k = 1, 2, \ldots$, и $f(z_1, \ldots, z_n, \ldots)$ — функция в пространстве последовательностей $\{z_k\}$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}^{\infty}$, порожденной множествами вида $\{z_1 \in \Gamma_1, \ldots, z_n \in \Gamma_n\}$; $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$; $n = 1, 2, \ldots$. Обратно, всякая случайная величина такого вида $\mathfrak{M}^{\tau}$-измерима *.

Чтобы доказать, что процесс y_t однородный и марковский, достаточно доказать, что для любой $\mathfrak{B}^{\infty}$-измеримой функции $F(z_1, \ldots, z_n, \ldots)$, любой последовательности неотрицательных чисел $\{h_k\}$, любого $x \in \mathcal{E}$ и любого $t \geqslant 0$

$$M_x[F(y_{t+h_1}, \ldots, y_{t+h_n}, \ldots) \mid \overline{\mathfrak{M}}_t] = M_{y_t} F(y_{h_1}, \ldots, y_{h_n}, \ldots) \qquad (7)$$

почти наверное относительно P_x. Из свойств условных математических ожиданий получаем, что почти наверное относительно P_x

$$M_x[F(y_{t+h_1}, \ldots, y_{t+h_n}, \ldots) \mid \mathfrak{M}_t] = M_x\{M_x[F(x(\tau_{t+h_1}), \ldots) \mid \mathfrak{M}_{\tau_t}] \mid \overline{\mathfrak{M}}_t\}. \qquad (8)$$

В силу того, что x_t есть однородный строго марковский процесс, получаем, что почти наверное

$$M_x[F(x(\tau_{t+h}), \ldots) \mid \mathfrak{M}_{\tau_t}] = M_x[\theta_{\tau_t} F(x(\tau_{h_1}), \ldots) \mid \mathfrak{M}_{\tau_t}] = M_{x(\tau_t)} F(x(\tau_{h_1}), \ldots). \qquad (9)$$

Подставляя это выражение в (8), получим (7). Теорема доказана.

Далее мы должны доказать, что величина $\tau_{\varphi(\omega)}(\omega)$ является $\mathfrak{M}^0$-измеримой, если функция $\varphi(\omega)$ $\mathfrak{M}^0$-измерима. Если функция $f(t, \omega)$ является $\mathfrak{M}$-измеримой, как функция ω при каждом фиксированном t и непрерывна справа по t при каждом фиксированном ω, то $f(t, \omega)$ измерима относительно $\mathfrak{M} \times \mathfrak{B}'$, где $\mathfrak{B}'$ есть σ-алгебра борелевских множеств на прямой **.

Из этого следует, что $\tau_t(\omega)$ измерима по совокупности (t, ω) относительно $\mathfrak{M}^0 \times \mathfrak{B}'$. Так как $\overline{\mathfrak{M}}^0 \subset \mathfrak{M}^0$, то отсюда следует измеримость $\tau_{\varphi(\omega)}(\omega)$ относительно $\mathfrak{M}^0$. Заметим, что из измеримости $\tau_t(\omega)$ по совокупности (t, ω) следует измеримость процесса $y(t, \omega) = x(\tau_t(\omega), \omega)$.

Доказательство теоремы 2. Для любого $u \geqslant 0$ и любого $B \in \mathfrak{M}^0$ имеем

$$B\{\tau_\varphi < u\} = B\{\varphi(\omega) < \sup_{\tau_s(\omega) < u} s\} = B \bigcup_r \{\varphi < r\}\{\sup_{\tau_s < u} s > r\} =$$

$$= B \bigcup_r \{\varphi < r\}\{\tau_r < u\},$$

* Это утверждение легко следует из теорем 1.6 и 1.5 книги Дуба [5], стр. 542.

** Положим $f_n(t, \omega) = f\left(\frac{k+1}{n}, \omega\right)$ для $\frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n}$ (k — любое целое число). Функции $f_n(t, \omega)$ являются $\mathfrak{M} \times \mathfrak{B}'$ - измеримыми и $f(t, \omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(t, \omega)$.

где r пробегает все рациональные числа. Если $B \in \overline{\mathfrak{M}}_\varphi$, то

$$B\{\varphi < r\} \in \overline{\mathfrak{M}}_r \subset \mathfrak{M}_{\tau_r}, \text{ и } B\{\varphi < r\}\{\tau_r < u\} \in \mathfrak{M}_u$$

для любых r и u. Поэтому и

$$B\{\tau_\varphi < u\} \in \mathfrak{M}_u. \tag{10}$$

Беря в качестве B все Ω, получаем условие независимости τ_φ от будущего x_t. Кроме того (10) означает, что $\overline{\mathfrak{M}}_\varphi \subset \mathfrak{M}_{\tau_\varphi}$. Заметим, что, если выполнено условие пункта а), то величина $x(\tau_{\varphi+h})$ для любого $h > 0$ измерима относительно $\mathfrak{M}^{\tau_\varphi}$. Это доказывается точно так же, как доказывалась измеримость $x(\tau_{t+h})$ относительно $\mathfrak{M}^{\tau_t}$ для $h > 0$. Учитывая это и включение $\overline{\mathfrak{M}}_\varphi \subset \mathfrak{M}_{\tau_\varphi}$, мы видим, что равенства (8), (9), а значит и (7) не нарушаются, если в них заменить t на $\varphi(\omega)$. Это доказывает строгую марковость процесса y_t.

Доказательство следствия. Докажем, что y_t — однородный строго марковский процесс. Для этого достаточно проверить, что τ_t не зависит от будущего x_t и $\tau_{\zeta+h} - \tau_\zeta = \theta_{\tau_\zeta}\tau_h$ для любого $h \geqslant 0$ и любой $\zeta(\omega)$, не зависящей от будущего y_t. Первое вытекает из того, что

$$\{\tau_t < u\} = \left\{\int_0^u \frac{ds}{\varphi(x_s)} > t\right\},$$

а $\int_0^u \frac{ds}{\varphi(x_s)}$ есть $\mathfrak{M}_u$-измеримая случайная величина. Измеримость же величины $\int_0^u \frac{ds}{\varphi(x_s)}$ относительно $\mathfrak{M}_u$ вытекает из следующей леммы*:

Пусть имеются измеримые пространства $(A, \mathfrak{A})$ *и* $(B, \mathfrak{B})$ *и функция* $F(a, b)$, *измеримая относительно* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. *Тогда* $\int_B F(a, b) P(db)$ *для любой меры* $P(\Gamma)$ *на* B *является* $\mathfrak{A}$*-измеримой функцией.*

Доказательство второго вытекает из равенства

$$\{\tau_{\zeta+h} - \tau_\zeta = c\} = \left\{\int_{\tau_\zeta}^{\tau_\zeta + c} \frac{ds}{\varphi(x_s)} = h\right\} = \left\{\int_0^c \frac{ds}{\varphi(x(\tau_\zeta + s))} = h\right\} =$$

$$= \theta_{\tau_\zeta}\left\{\int_0^c \frac{ds}{\varphi(x_s)} = h\right\} = \theta_{\tau_\zeta}\{\tau_h = c\} = \{\theta_{\tau_\zeta}\tau_h = c\}.$$

Наконец, так как $\int_0^c \frac{ds}{\varphi(x_s)}$ строго возрастает при каждом ω по c, то $\tau_t(\omega)$ непрерывна и, следовательно, процесс y_t непрерывен справа.

* Мы не приводим доказательства этой несложной леммы. Ее доказательство будет опубликовано в книге Е. Б. Дынкина о марковских процессах, которая готовится к печати.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\overline{T}_u$ есть момент первого выхода из окрестности U (см. п. 2, § 1) для процесса y_t. Тогда $\overline{T}_u = \int_0^{T_u} \frac{ds}{\varphi(x_s)}$. Вследствие непрерывности функции $\varphi(x)$

$$\lim_{dU \to 0} \frac{M_x T_u}{M_x \overline{T}_u} = \varphi(x).$$

Если $f(x) \in D_{\mathfrak{A}}$, то

$$\lim_{dU \to 0} \frac{M_x f(y(\overline{T}_u)) - f(x)}{M_x \overline{T}_u} = \lim_{dU \to 0} \frac{M_x f(x(T_u)) - f(x)}{M_x T_u} \lim_{dU \to 0} \frac{M_x T_u}{M_x \overline{T}_u} = \varphi(x) \mathfrak{A} f(x).$$

Если $f \in D_{\mathfrak{A}}$, то так как $\varphi > 0$, из этого же равенства получаем, что $f \in D_{\overline{\mathfrak{A}}}$ и $\overline{\mathfrak{A}} f(x) = \varphi(x) \mathfrak{A} f(x)$.

§ 3. Доказательство теоремы 4

Сначала мы докажем ряд лемм, из которых следует утверждение а) и свойство строгой марковости, однородности и непрерывности процесса $u_{-1}(x(\tau_t))$. Затем вычислим инфинитезимальный оператор этого процесса.

Заметим, что мы можем рассматривать только случай, когда $u(x) \equiv x$, так как непрерывное монотонное преобразование $y = u(x)$ отрезка $[r_1, r_2]$ в отрезок $[u(r_1), u(r_2)]$ сводит общий случай к этому частному случаю. При этом функции $v(x)$ и $v_j(x)$ переходят в $n(x) = v(u_{-1}(x))$ и $n_j(x) = v_j(u_{-1}(x))$.

Лемма 1. *Пусть x_t — винеровский процесс на прямой, $n(x)$ — неубывающая функция на прямой, $n_j(x) \Rightarrow n(x)$ и $\frac{dn_j(x)}{dx}$ существуют и непрерывны. Тогда для любого x и любого $t \geqslant 0$*

$$\lim_{j \to \infty} \int_0^t \frac{dn_j}{dx}(x_s)\, ds$$

существует в смысле сходимости по мере P_x, причем для любого $\varepsilon > 0$ при $k \to \infty$

$$P_x \left\{ \left| \int_0^t \frac{dn_k}{dx}(x_s)\, ds - \lim_{j \to \infty} \int_0^t \frac{dn_j}{dx}(x_s)\, ds \right| > \varepsilon \right\} \to 0$$

равномерно по x на любом конечном отрезке.

Доказательство. Обозначим

$$n_{kl}(x) = \begin{cases} n_k(x) - n_l(x), & |x| \leqslant N, \\ n_k(N) - n_l(N), & x > N, \\ n_k(-N) - n_l(-N), & x < -N; \end{cases}$$

$$\zeta_{kl}(t) = \int_0^t \frac{dn_{kl}}{dx}(x_s)\, ds, \quad m(t, x) = M_x \zeta_{kl}(t), \quad D(t, x) = M_x \zeta_{kl}^2(t).$$

Достаточно доказать, что для любого N

$$D(t, x) \to 0 \quad \text{при} \quad \min(k, l) \to 0 \tag{11}$$

равномерно по x. Действительно,

$$P_x\left\{\left|\int_0^t \frac{dn_k}{dx}(x_s)\,ds - \int_0^t \frac{dn_l}{dx}(x_s)ds\right| > \varepsilon\right\} \leqslant P_x\left\{\max_{s\leqslant t}|x_s| > N\right\} +$$

$$+ P_x(|\zeta_{kl}(t)| > \varepsilon) \leqslant P_x\{\max_{s\leqslant t}|x_s| > N\} + \frac{D(t, x)}{\varepsilon^2}. \tag{12}$$

Если верно (11), то, выбирая сначала достаточно большое N, а затем достаточно большой $\min(k, l)$, можно сделать правую часть (12) меньше любого наперед заданного $\delta > 0$ сразу для всех x из наперед заданного конечного отрезка. Докажем соотношение (11).

Как известно (см. [12]), характеристическая функция $\varphi_{\zeta_{kl}}(\lambda) = M_x e^{i\lambda\zeta_{kl}}$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + i\lambda\frac{\partial n_{kl}(x)}{dx}\varphi; \quad \varphi|_{t=0} = 1.$$

Отсюда получаем уравнения для $m(t, x)$ и $D(t, x)$:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{dn_{kl}(x)}{dx}, \quad m|_{t=0} = 0;$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + 2\frac{dn_{kl}(x)}{dx}m(t, x), \quad D|_{t=0} = 0.$$

Поэтому

$$m(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dn_{kl}(z)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}}ds,$$

$$D(c, x) = 2\int_{-\infty}^{\infty} dn_{kl}(z)\int_0^e m(s, z)\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2s}}ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dn_{kl}(z)\,dn_{kl}(y)\left[\frac{1}{\pi}\int_0^c ds\int_0^s \frac{1}{\sqrt{st}}e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}-\frac{(z-y)^2}{2t}}dt\right]. \tag{13}$$

Функция $n_{kl}(x) \to 0$ при $\min(k, l) \to \infty$ во всех точках непрерывности функции $n(x)$, а в квадратных скобках стоит непрерывная функция (обозначим ее $f(x, y, z)$). Поэтому при фиксированных x и c

$$D(c, x) \to 0 \quad \text{при} \quad \min(k, l) \to \infty.$$

Остается доказать, что стремление в (11) равномерно по x. Как нетрудно

проверить, $f(x, y, z)$ обладает ограниченной производной по x. Действительно, для $x \neq z$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^c d_s \frac{(z-x)}{s^{3/2}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(z-y)^2}{2t}} dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2|x-z|}{\pi}\int_0^c e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}} \frac{ds}{s} = \frac{2(x-z)}{\pi}\int_{\frac{(x-z)^2}{c}}^{\infty} e^{-\frac{w}{2}} \frac{dw}{w}.$$

Последнее равенство получено с помощью замены $w = \frac{(x-z)^2}{s}$. Правая часть равенства ограничена абсолютной константой. Отсюда вытекает, что выражение для $D(c, x)$ можно дифференцировать по x под знаком интеграла. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} D(c, x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)\, dn_{kl}(z)\, dn_{kl}(y),$$

и

$$\left|\frac{\partial D}{\partial x}\right| \leqslant \max_{k,l}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot [n_k(N) - n_k(-N) + n_l(N) - n_l(-N)]^2.$$

Следовательно, $\frac{\partial D}{\partial x}$ ограничена равномерно по k и l. Отсюда вытекает, что (11) выполняется равномерно по x при фиксированном c. Этим завершается доказательство леммы 1.

Обозначим $U_k(t, \omega) = \int_0^t \frac{dn_k}{dx}(x_s)\, ds$.

Согласно лемме 1 для каждого j найдется k_j такое, что при $k, l \geqslant k_j$

$$P_x\left\{|U_k(t) - U_l(t)| > \frac{1}{2^j}\right\} < \frac{1}{2^j}$$

для $|x| < 2^j$. Множество тех ω, для которых последовательность $U_k(t)$ сходится при $j \to \infty$, обозначим Ω_1.

Повторяя обычные рассуждения, с помощью которых доказывается, что из последовательности функций, фундаментальной по мере, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду, легко показать, что $P_x(\Omega_1) = 1$ для любого x. Далее, с помощью известного диагонального процесса мы можем выбрать подпоследовательность K целых чисел такую, что $\lim\limits_{\substack{j\to\infty \\ j\in K}} U_j(r, \omega)$ существует для всех рациональных r при $\omega \in \Omega'$, где Ω' — некоторое ω-множество, для которого $P_x(\Omega') = 1$ при всех x. Мы можем считать, что $\Omega' = \Omega$, так как сокращение пространства элементарных событий Ω до Ω' не нарушает ни марковского однородного характера процесса x, ни его переходных вероятностей. Обозначим $\lim\limits_{\substack{j\to\infty \\ j\in K}} U_j(r, \omega) = U(r, \omega)$.

Лемма 2. *$U(r, \omega)$ равномерно непрерывна по r на любом конечном отрезке измерения r (r пробегает только рациональные значения) почти наверное относительно любой меры P_x.*

Доказательство этой леммы основано на том, что процесс $(x_r, U(r, \omega))$ марковский и однородный и удовлетворяет условию, достаточному для равномерной непрерывности траекторий, которое сформулировано в работе Е. Б. Дынкина ([12], лемма 3).

Лемма 3. *Если $n(x)$ строго возрастает, то $U(r, \omega)$ строго возрастает по r с P_x-вероятностью* 1.

Доказательство. Строгая монотонность $U(r, \omega)$ будет доказана, если мы убедимся, что для любого $s > 0$ имеет вероятность 0 при любом начальном значении x событие

$$\bigcup_r \{U(r+s) - U(r)\},$$

где суммирование проводится по всем рациональным $r \geqslant 0$. Для этого достаточно доказать, что $P_x\{U(r+s) - U(r) = 0\} = 0$ при любом x и любых рациональных $r \geqslant 0$ и $s > 0$. Легко проверить, что $U(r+s) - U(r) = \theta_r U(s)$. Поэтому

$$P_x\{P(r+s) - U(r) = 0\} = M_x P_{x_r}\{U(s) = 0\},$$

и лемма будет доказана, если показать, что для любого x и для любого $t > 0$

$$P_x\{U(t) = 0\} = 0. \tag{14}$$

Заметим, что достаточно доказать равенство (14) для всюду плотного множества R значений x. Действительно, если (14) верно для $x \in R$, то для любых a, $b \in R$ и для любого $x \in (a, b)$

$$P_x\{U(t) > 0\} \geqslant \int\limits_{\left\{T_{(a,b)} < \frac{t}{2}\right\}} P_{x(T_{(a,b)})}\left\{U\left(\frac{t}{2}\right) > 0\right\} P_x(d\omega) = P_x\left\{T_{(a,b)} < \frac{t}{2}\right\}$$

(здесь $T_{(a,b)}$, как обычно, означает момент первого выхода из (a, b) для процесса x_t). Так как a и b могут быть взяты как угодно близко к точке x, то $P_x\left\{T_{(a,b)} < \frac{t}{2}\right\}$ может быть сделано как угодно близкой к 1. Поэтому

$$P_x\{U(t) > 0\} = 1.$$

Достаточно доказать (14) для случая, когда $n(x)$ и $n_j(x)$ постоянны вне некоторого интервала (a, b), содержащего x. Пусть $\psi_\lambda(x, t) = M_x e^{-\lambda U(t,\omega)}$ и $\psi_{\lambda j}(x, t) = M_x e^{-\lambda U_j(t,\omega)}$. Из леммы 1 вытекает, что $\psi_{\lambda j}(x, t) \to \psi_\lambda(x, t)$ при $j \to \infty$ равномерно по x. Из теоремы 2 работы [12] следует, что $\psi_{\lambda j}(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi_{\lambda j}(x, t) = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b dn_j(z) \int_0^t \psi_{\lambda j}(z, t-s) \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}} ds.$$

В силу равномерности по x сходимости $\psi_{\lambda j} \to \psi_\lambda$ при $j \to \infty$ можно перейти к пределу по $j \to \infty$ и в этом интегральном уравнении. Получаем

$$\psi_\lambda(x, t) = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b dn(z) \int_0^t \psi_\lambda(z, t-s) \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}} ds. \tag{15}$$

Заметим, что $\psi_\lambda(x, t)$ не возрастает при увеличении λ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \psi_\lambda(x, t) = P_x\{U(t) = 0\}$. Используя уравнение (15), получаем

$$\int_a^b dn(z) \int_0^t P_z\{U(s) = 0\} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}} ds = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b dn(z) \int_0^t \psi_\lambda(z, s) \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}} ds =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}(1 - \psi_\lambda)}{\lambda} = 0,$$

то есть

$$\int_0^t P_z\{U(s) = 0\} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2s}} ds = 0 \tag{16}$$

почти всюду относительно меры, индуцированной функцией $n(z)$, а значит, на всюду плотном множестве значений z, так как $n(z)$ строго возрастает. Далее, так как $P_z\{U\{s\} = 0\}$ не возрастает при росте s, то из (16) вытекает, что $P_z\{U(s) = 0\} = 0$ для всех $s > 0$ на всюду плотном множестве значений z.

В дальнейшем будем предполагать, что $n(x)$ строго возрастает. Не ограничивая общности, мы можем считать, что выбираются только такие $n_j(x)$, что $\frac{dn_j(x)}{dx} > 0$.

Снова выкидываем из пространства Ω множество, которое имеет меру 0 при любом начальном состоянии x. А именно, будем считать, что x_t определено на том ω-множестве, где $U(r, \omega)$ непрерывна и строго монотонна по r. Теперь $\lim\limits_{\substack{j\to\infty \\ j\in K}} U_j(t, \omega) = U(t, \omega)$ существует, очевидно, для всех ω и всех (а не только рациональных) t и является непрерывной и строго монотонной функцией от t для всех ω. Кроме того, так как $U(t, \omega)$ конечно с P_x-вероятностью 1 для любого x, мы можем считать $U(t, \omega)$ конечным для всех t и ω.

Определим $\tau_t(\omega)$ равенством

$$U(\tau_t(\omega), \omega) = t. \tag{17}$$

Функция $\tau_t(\omega)$ при каждом ω является обратной к $U(t, \omega)$ и поэтому также непрерывна и строго монотонна. Отсюда вытекает, что процесс $y_t = x(\tau_t)$ непрерывен.

Заметим, что если мы будем строить функцию $U(t, \omega)$, исходя от другой последовательности $n_j(x) \Rightarrow n(x)$, то получим функцию $\overline{U}(t, \omega)$, совпадающую с $U(t, \omega)$ при всех t на ω-множестве P_x-меры 1. Это вытекает из того, что $U(t, \omega)$ является пределом в смысле сходимости по мере P_x

для последовательности $U_k(t)$, соответствующей любой последовательности $n_k(x) \Rightarrow n(x)$. Отсюда следует, что функции $\tau_t(\omega)$, полученные из разных последовательностей $n_k \Rightarrow n$, могут различаться только на множестве P_x-меры 0.

Нетрудно доказать, что величины $\tau_{tj}(\omega)$, определяемые равенством (4) (причем $\{n_j(x)\}$ — любая последовательность, сходящаяся к $n(x)$ в точках непрерывности $n(x)$), сходятся при $j \to \infty$ к величине $\tau_t(\omega)$ по P_x-вероятности для любого x.

Лемма 4. *$\tau_t(\omega)$ при каждом t не зависит от будущего процесса x_t и удовлетворяет условию* б) *теоремы* 2.

Эта лемма доказывается аналогично следствию из теоремы 2.

Из этих лемм следует, что процесс $y_t = x(\tau_t)$ является однородным, непрерывным и строго марковским. Он является и регулярным на каждом отрезке. Действительно, обозначим $T_\alpha(\omega)$ время первого достижения α в процессе x_t и $\overline{T}_\alpha$ — то же время в процессе y_t. Тогда $\overline{T}_\alpha(\omega) = U(T_\alpha(\omega), \omega)$ и эта величина конечна, если конечна $T_\alpha(\omega)$. Из этого вытекает регулярность y_t на каждом конечном отрезке.

Лемма 5. *Если $\zeta_n \to \zeta$ по вероятности, и $\mathbf{M}\zeta_n^2 < \text{const} < \infty$, то* $\mathbf{M}|\zeta_n - \zeta| \to 0$.

Доказательство. Пусть имеется последовательность n_k такая, что $\mathbf{M}|\zeta_{n_k} - \zeta| > \delta > 0$. Обозначим $|\zeta_{n_k} - \zeta| = \eta_k$. Тогда

$$\mathbf{M}\eta_k^2 \geqslant \mathbf{P}\left(\eta_k > \frac{\delta}{2}\right) \int\limits_{\left\{\eta_k > \frac{\delta}{2}\right\}} \eta_k^2 \frac{P(d\omega)}{\mathbf{P}\left(\eta_k > \frac{\delta}{2}\right)} \geqslant \left[\mathbf{P}\left(\eta_k > \frac{\delta}{2}\right)\right]^{-1} \left[\int\limits_{\left\{\eta_k > \frac{\delta}{2}\right\}} \eta_k P(d\omega)\right]^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left[\mathbf{P}\left(\eta_k > \frac{\delta}{2}\right)\right]^{-1} \frac{\delta^2}{4} \underset{n \to \infty}{\to} \infty,$$

что противоречит условиям леммы.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любой строго возрастающей на прямой функции $n(x)$ процесс $y_t = x(\tau_t)$ обладает расширенным инфинитезимальным оператором $D_n D_x$.*

Доказательство. Так как процесс $y_t = x(\tau_t)$ непрерывный, строго марковский и регулярный на каждом конечном отрезке, то, как уже говорилось, его расширенный инфинитезимальный оператор $\overline{\mathfrak{A}}$ может быть представлен в виде $\overline{\mathfrak{A}} = D_v D_u$. При этом (см. [1]) в качестве $u(x)$ и $v(x)$ для $x \in (a, b)$ можно взять $P_x\{y(\overline{T}_{(ab)}) = b\}$ и $-D_u m(x)$, где $m(x) = M_x \overline{T}_{(ab)}$. В нашем случае

$$u(x) = P_x\{y(T_{(ab)}) = b\} = P_x\{x(T_{(ab)}) = b\} = \frac{x - a}{b - a},$$

и $\overline{T}_{(ab)} = U(T_{(ab)}\omega)$. Чтобы найти $m(x)$, воспользуемся леммой 5. Заметим, что $U(T_{(ab)}) = \lim\limits_{j \to \infty} \int\limits_0^{T_{(ab)}} \frac{dn_j}{dx}(x_s)\, ds$, а функции

$$m_j(x) = M_x \int_0^{T_{(ab)}} \frac{dn_j}{dx}(x_s)\,ds \text{ и } D_j(x) = M_x \left[\int_0^{T_{(ab)}} \frac{dn_j}{dx}(x_s)\,ds\right]^2 \text{ на } [a, b]$$

удовлетворяют уравнениям (см. [3]):

$$\frac{d^2 m_j(x)}{dx^2} + \frac{dn_j(x)}{dx} = 0,\ m_j(a) = m_j(b) = 0,$$

$$\frac{d^2 D_j(x)}{dx^2} + 2m_j(x)\frac{dn_j(x)}{dx} = 0,\ D_j(a) = D_j(b) = 0.$$

Из первого уравнения получаем: если x есть точка непрерывности $n(x)$, то

$$m_j(x) = -\int_a^x n_j(y)\,dy + \frac{x-a}{b-a}\int_a^b n_j(y)\,dy \underset{j\to\infty}{\to} -\int_a^x n(y)\,dy + \frac{x-a}{b-a}\int_a^b n(y)\,dy.$$

Из второго уравнения вытекает равномерная ограниченность $D_j(x)$. Теперь, применяя лемму 5, получаем, что

$$M_x\left|\int_0^{T_{(ab)}} \frac{dn_j}{dx}(x_s)\,ds - U(T_{(ab)})\right| \underset{j\to\infty}{\to} 0$$

и, следовательно,

$$m(x) = \lim_{j\to\infty} m_j(x) = -\int_a^x n(y)\,dy + \frac{x-a}{b-a}\int_a^b n(y)\,dy.$$

Окончательно имеем:

$$-D_u m(x) = n(x)(b-a) + \text{const}, \text{ и } \mathfrak{A} = D_n D_x.$$

Лемма 6 доказана.

Расширенный инфинитезимальный оператор процесса $x(\tau_t)$ в точке x не изменится, если функцию $n(x)$ изменить любым образом вне некоторой окрестности точки x. Поэтому из леммы 6 вытекает, что в любой внутренней точке отрезка $[r_1, r_2]$ расширенный инфинитезимальный оператор процесса (6) есть $D_v D_u$. Следовательно, для доказательства теоремы 4 остается проверить только, что выполняются соотношения (3′) и (3″) на границах.

Лемма 7. *Пусть x_t — винеровский процесс на полупрямой с отражением в нуле, и функция $n(x)$ конечна при $x > 0$ не убывает и $n(0) = -\infty$.*

Пусть $n_j(x) \Rightarrow n(x)$ и $\frac{dn_j(x)}{dx}$ непрерывны. Тогда $\int_0^{T_\beta(\omega)} \frac{dn_j}{dx}(x_s)\,ds \underset{j\to\infty}{\to} \infty$ по мере P_0 для любого $\beta > 0$.

Эта лемма получается с помощью дифференциального и интегрального уравнений, которым удовлетворяют функции

$$\psi_{\lambda j}(x) = M_x \exp\left\{-\lambda \int_0^{\tau_\beta} \frac{dn_j}{dx}(x_s)\, ds\right\} \text{ (см. [3]).}$$

Из леммы вытекает, что если r_j конечно, и $u|n(r_j)| = \infty$, то $\tau_t = \lim\limits_{j\to\infty} \tau_{tj} = T_{r_j}(\omega)$ при $\tau_t \geqslant T_{r_j}$ на множестве, где $T_{r_j}(\omega) < \infty$ (равенство соблюдается с точностью до ω-множества P_x меры 0). Следовательно, в этом случае граница является поглощающей для процесса (6) и соотношение (3″) выполняется.

Разберем случай, когда $u(r_j)$ и $v(r_j)$ конечны, или, что равносильно этому, когда r_j и $n(r_j)$ конечны. Будем считать, что r_j и $n(r_j)$ конечны для любых значений j. Для простоты положим $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Построим функцию $\tilde{n}(x)$ на всей прямой со свойствами

$$\tilde{n}(0) = n(0),\ \tilde{n}(x) - \tilde{n}([x]) = n(\{x\}) - n(0),$$

где $[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную части x. Пусть $\tilde{x}_t$ — винеровский процесс на прямой, и $\tilde{\tau}_t$ получена из $\tilde{n}(x)$ и $\tilde{x}_t$ согласно равенствам (4) и (5).

Если все точки вида $\pm x + 2k$ ($k = , \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$) считать за одну точку, то процесс $\tilde{x}_t$ перейдет в винеровский процесс на отрезке [0,1] с отражением на концах, а $\tilde{\tau}_t(\omega)$ с P_x-вероятностью 1 будет совпадать с величиной $\tilde{\tau}_t$, полученной из $n(x)$ и x_t согласно равенствам (4) и (5). Функцию $\tau_t(\omega)$ можно выбрать так, что она будет непрерывная, неубывающая по t и конечная при каждом $t < \infty$ на множестве P_x-вероятности 1, при каждом t будет величиной, не зависящей от будущего процесса $\tilde{x}_t$, и будет удовлетворять условию б) теоремы 2. То же самое верно, очевидно, и в отношении функции τ_t к процессу x_t. Поэтому процесс $x(\tau_t)$ однородный, непрерывный, строго марковский и регулярный на [0,1].

Определим его инфинитезимальный оператор A. Каждой $f(x) \in D_A$ соответствует единственная функция $\tilde{f}(x)$, являющаяся продолжением $f(x)$ на всю прямую и симметричная относительно каждой целочисленной точки. При этом $M_{\pm x+2k}\tilde{f}(\tilde{x}(\tilde{\tau}_t)) = M_x f(x(\tau_t))$ для любых $t \geqslant 0$, $x \in [0,1]$ и целого k. Поэтому $\tilde{f}(x)$ принадлежит области определения оператора $D_{\tilde{n}}D_x$. И обратно, всякая непрерывная функция $\tilde{f}(x)$, принадлежащая области определения $D_{\tilde{n}}D_x$ и симметричная относительно каждой целочисленной точки, принадлежит D_A, если ее рассматривать только на [0,1]. В обоих случаях $Af(x) = D_{\tilde{n}}D_x\tilde{f}(x)$ для $x \in [0,1]$. Таким образом оператор A совпадает на внутренних точках отрезка [0,1] с D_nD_x. Остается найти вид оператора $D_{\tilde{n}}D_x$ в точках 0 и 1. Заметим, что вследствие условия симметричности функции в целочисленных точках x

$$-D_x^-\tilde{f}(x) = D_x^+\tilde{f}(x). \qquad (18)$$

Если функция $n(x)$ (а значит и $\tilde{n}(x)$) непрерывна в нуле, то по теореме 6 из [1] получаем, что $D_x^-\tilde{f}(0) = D_x^+\tilde{f}(0)$, т. е. $D_x^+f(0) = 0$. Так как, согласно [1], $D_x^+\tilde{f}(x)$ непрерывно справа, то условие (3′) выполняется. Точно так же доказываем теорему для случая, когда $n(1) - n(1-0) = 0$.

Если $n(0+) - n(0) > 0$, то из (18) следует, что

$$D_{\tilde{n}}D_x^+\tilde{f}(0) = \frac{D_x^+f(0) - D_x^-f(0)}{\tilde{n}(0+) - \tilde{n}(0-)} = \frac{D_x^+f(0)}{n(0+) - n(0)}.$$

Если $n(1) - n(1-0) > 0$, то $D_{\tilde{n}}D_x^-\tilde{f}(1) = \dfrac{D_x^-f(1)}{n(1-0) - n(1)}$. Таким образом, мы доказали теорему 4 для всех случаев, когда характер краевых условий один и тот же на обеих границах. В случае, когда характер краевых условий на обеих границах различен, доказательство проводится аналогично.

Поступила в редакцию
12.3.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен. **1**, вып. 1 (1956), 38—60.
[2] Е. Б. Дынкин и А. А. Юшкевич, Строго марковские процессы, Теория вероятн. и ее примен. **1**, вып. 1 (1956), 149—155.
[3] Р. З. Хасьминский, Распределение вероятностей для функционалов для траекторий случайного процесса дифференциального типа, ДАН СССР, **104**, № 1 (1955). 22.
[4] В. Феллер, Мак-Кин, Диффузионный эквивалент счетной цепи Маркова, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **42**, № 6 (1956)
[5] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ., 1956.
[6] Р. З. Хасьминский, Предельные распределения для функционалов от непрерывных марковских процессов. Дипломная работа, Мех.-мат. ф-т, МГУ, 1954.
[7] Е. Б. Дынкин, Скачкообразные процессы, Теория вероятностей и ее применения (готовится к печати).
[8] Е. Б. Дынкин, Непрерывные одномерные марковские процессы, ДАН СССР, **105**, № 3 (1955), 405.
[9] П. Халмош, Теория меры, И.— А., 1953.
[10] Е. Б. Дынкин, Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, № 6 (1952), 563.
[11] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория вероятн и ее примен., **1**, вып. 1 (1956), 25—37.
[12] Е. Б. Дынкин, Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН СССР, **104**, № 5 (1955), 691.

RANDON SUBSTITUTION OF TIME IN STRONG MARKOV PROCESSES

V. A. VOLKONSKI (*MOSCOW*)

(Summary)

The terminology and symbols are as in [7] and [1].

Let $x(t, \omega)$ be a homogeneous strong Markov process, and $\tau_t(\omega)$ be a random function not decreasing for increasing t. The process $y_t = x(\tau_t(\omega), \omega)$ is called a process obtained from $x_t(\omega)$ by means of a random substitution of time τ_t.

The conditions sufficient for the process y_t to be a Markov or a strong Markov process are formulated (theorems 1 and 2).

In [1] it is shown that the infinitesimal operator A of a Feller strong Markov process continuous on the right is a contraction of a certain operator $\mathfrak{a}$, which is called the extended operator. It is shown that if x_t and $x(\tau_t)$ are Feller process continuous on the right and τ_t is determined by equation (2), where $\varphi(x) > 0$ and continuous, then their extended operator is $\mathfrak{a}$ where $\mathfrak{a}$ satisfies the equation $t = \varphi(x)\mathfrak{a}$ (theorem 3).

In theorem 4 and in its corollary it is shown that a one-dimensional homogeneous strong Markov regular continuous process may be obtained from a Wiener process by means of a random substitution of time and a monotone transformation of the segment.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1958

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О НЕОГРАНИЧЕННОСТИ ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ю. К. БЕЛЯЕВ

Основным объектом изучения в настоящей заметке являются стационарные гауссовские процессы, спектральные функции которых содержат непрерывную компоненту. Так как спектральная функция $F(\lambda)$ стационарного процесса есть неубывающая функция ограниченной вариации, то по известной теореме Лебега она представима в виде суммы трех неубывающих функций ограниченной вариации:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda), \tag{1}$$

где $F_1(\lambda)$ — функция скачков, $F_2(\lambda)$ — сингулярная, а $F_3(\lambda)$ — абсолютно непрерывная функции. Основной результат состоит в том, что для процессов, у которых $F_2(\lambda) + F_3(\lambda) \not\equiv 0$ или, как говорят, для процессов, спектральные функции которых содержат непрерывную компоненту, почти все выборочные функции неограничены. В дальнейшем процессы предполагаются сепарабельными, и слово сепарабельный будет опускаться.

Определение. *Случайный процесс* $\{x(t), -\infty < t < +\infty\}$ *называется неограниченным с вероятностью* 1, *если для любого* $A > 0$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{-\infty<t<+\infty} \{|x(t)| > A\}\right) = 1. \tag{2}$$

Сформулируем три необходимые нам леммы.

Лемма 1. *Для того, чтобы случайный процесс был неограничен с вероятностью* 1, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $A > 0$ *существовали такие конечные подмножества* $T_n(t_{n1}, \ldots, t_{nn})$, *что*

$$\sup_{T_n} \mathbf{P}\left(\bigcup_{t\in T_n} \{|x(t)| > A\}\right) = 1. \tag{3}$$

Доказательство леммы очевидно.

Лемма 2. *Если* $\frac{1}{T}\int_0^T |R(t)|^2\,dt \to 0\ (T \to \infty)$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого натурального* N *можно найти такое* t, *что* $|R(nt)| < \varepsilon$ *для* $n = 1, \ldots, N$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{N} |R(nt)|^2\right] dt \to 0\ (T \to \infty) \tag{4}$$

при любом фиксированном N. Итак, пусть нам заданы N и ε, выберем T настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{N} |R(nt)|^2\right] dt < \varepsilon^2, \tag{5}$$

тогда существуют точки $t \in [0, T]$ в которых условие леммы выполнено. Действительно в противном случае для всех $t \in [0, T]$ имеем $\sum_{n=1}^{N} |R(nt)|^2 \geqslant \varepsilon^2$, а следовательно, и

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{N} |R(nt)|^2\right] dt \geqslant \varepsilon^2, \tag{6}$$

что противоречит выбору T.

Лемма 3. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две независимые друг от друга последовательности случайных величин, одномерные распределения которых стационарны. Тогда если одна из последовательностей не ограничена с вероятностью* 1, *то и последовательность $\{x_n + y_n\}$ неограничена с вероятностью* 1.

Доказательство. Нам достаточно показать, что для любых $A > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$\mathbf{P}(\{\max_{1\leqslant k\leqslant N} |x_k + y_k| > A\}) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{7}$$

Итак, пусть нам заданы $A > 0$ и $\varepsilon > 0$. Найдется такое $A' \geqslant A$ и такое N, что

$$\mathbf{P}(\{|y_k| > A'\}) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

$$\mathbf{P}(\{\max_{1\leqslant k\leqslant N} |x_k| > 2A'\}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Для краткости обозначим

$$C_k = \{|x_i| \leqslant 2A',\ i < k,\ |x_k| > 2A'\},\quad C = \bigcup_{i=1}^{N} C_k, \tag{10}$$

C_k — непересекающиеся множества.

Для $k = 1, \ldots, N$

$$\mathbf{P}(\{|x_k + y_k| > A'\} \mid C_k) \geqslant \mathbf{P}(\{|y_k| < A'\} \mid C_k) = \mathbf{P}(\{|y_k| < A'\}) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{11}$$

откуда получаем

$$\mathbf{P}(\{\max_{1\leqslant k\leqslant N} |x_k + y_k| > A'\} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(C_k)\, \mathbf{P}(\{\max_{1\leqslant k\leqslant N} |x_k + y_k| > A'\} \mid C_k) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(C_k)\, \mathbf{P}(\{|y_k + x_k| > A'\} \mid C_k) \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathbf{P}(C) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{12}$$

Так как для $A' \geqslant A$

$$\{\max_{1\leqslant k\leqslant N} |x_k + y_k| > A'\} \subseteq \{\max_{1\leqslant k\leqslant N} |x_k + y_k| > A\}, \tag{13}$$

то лемма доказана.

Используем доказанные выше леммы.

В силу леммы 1 для доказательства неограниченности процесса $x(t)$, достаточно для любого $A>0$ и $\varepsilon>0$ найти такие $t_1, \ldots, t_N$, что

$$\mathbf{P}\left(\{\max_{1\leqslant i\leqslant N}|x(t_i)|>A\}\right)>1-\varepsilon. \tag{14}$$

Итак, пусть нам заданы $A>0$ и $\varepsilon>0$. Всегда можно выбрать столь большое N, что для $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимых между собой, одинаково распределенных гауссовских величин

$$P\left(\{\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\xi_i|>A\}\right)>1-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Действительно, так как $r=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int\limits_{-A}^{A}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx<1$, то при $N\geqslant N_0(\varepsilon)$, $r^N<\dfrac{\varepsilon}{2}$, а тогда

$$\mathbf{P}\left(\{\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\xi_i|>A\}\right)=1-r^N>1-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Пусть процесс $x(t)$ имеет непрерывную спектральную функцию.

В статье А. Я. Хинчина [1] доказано, что для таких процессов

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T|R(t)|^2\,dt\to 0\quad(T\to\infty), \tag{17}$$

где $R(t)$ — корреляционная функция процесса.

В силу леммы 2 для любого $\varepsilon_k>0$ ($\varepsilon_k\to 0$, $k\to\infty$) можно найти такие t_k, что $Mx(mt_k)\,x(nt_k)|=|R[(m-n)t_k]|<\varepsilon_k$ для $m\neq n$ $m, n=1, \ldots, N$, тогда если

$$\mathbf{P}(\{\xi_i<y\})=\mathbf{P}(\{x(t)<y\}), \tag{18}$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\left(\{\max_{1\leqslant n\leqslant N}|x(nt_k)|>A\}\right)=\mathbf{P}\left(\{\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\xi_i|>A\}\right). \tag{19}$$

Следовательно, существует такое $k_0(\varepsilon)$, что для $k>k_0(\varepsilon)$

$$\mathbf{P}\left(\{\max_{1\leqslant n\leqslant N}|x(nt_k)|>A\}\right)>1-\varepsilon. \tag{20}$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Стационарные гауссовские процессы с непрерывной спектральной функции с вероятностью 1 неограничены.*

Любой гауссовский стационарный процесс, спектр которого, кроме непрерывной компоненты, содержит дискретную, можно рассматривать как сумму двух независимых между собой стационарных гауссовских процессов, один из которых имеет дискретную спектральную функцию, а второй непрерывную и, следовательно, неограничен с вероятностью 1.

Выберем счетную последовательность точек $\{t_k\}$, на которой с вероятностью 1 неограничен процесс, имеющий непрерывную спектральную функцию. Применяя к этой последовательности лемму 3, получаем окончательный результат.

Теорема 2. *Если спектральная функция стационарного гауссовского процесса содержит непрерывную компоненту, то процесс с вероятностью 1 неограничен.*

В случае стационарных гауссовских процессов с дискретной спектральной функцией имеются как ограниченные с вероятностью 1, так и неограниченные с вероятностью 1 процессы. Так, если обозначим скачки спектральной функции b_k^2, $b_k^2=F(\lambda_k+0)-F(\lambda_k)$, и $\sum\limits_k b_k<\infty$, то соответствующий гауссовский процесс ограничен с вероятностью 1, с другой стороны, если $\sum b_k=\infty$, а λ_k не связаны рациональными соотношениями,

то соответствующий гауссовский процесс неограничен с вероятностью 1. В заключение автор выражает благодарность А. Н. Колмогорову за сделанные замечания.

Поступила в редакцию
9. 1. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Теория корреляции стационарных стохастических процессов, Успехи матем. наук, V (1938), 42—51.

ON THE UNBOUNDEDNESS OF THE SAMPLE FUNCTIONS OF GAUSSIAN PROCESSES

Yu. K. BELJAEV (MOSCOW)

(*Summary*)

The following theorem is proved: if $x(t)$ is a stationary separable Gaussian random process whose spectral function has a non-null continuous component, then almost all sample functions of this process are unbounded.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ДЕФЕКТНЫХ ЕДИНИЦ В ПАРТИЯХ ИЗДЕЛИЙ

Х. Б. КОРДОНСКИЙ

При решении некоторых задач приемочного контроля [1] представляет интерес анализ распределения числа X дефектных единиц в партиях. Одной из общих схем образования этого распределения может быть следующая:

Изготавливаются партии объемом N_r, где r — номер партии. В процессе изготовления любого изделия с вероятностью $\gamma(t)$ может возникнуть разладка. Время t отсчитывается от момента предыдущей наладки процесса обработки. Разладка приводит с вероятностью $q(\tau) > q_0$ к появлению дефектного изделия. Время τ отсчитывается от момента разладки процесса обработки. В течение изготовления партии через равные промежутки времени производится профилактический контроль. С вероятностью $Q(t, \tau, q)$ контроль приводит к обнаружению разладки. При обнаружении разладки процесс отлаживается и обеспечивается $q \leqslant q_0$.

В свете приведенной схемы следует различать три класса причин, вызывающих появление разладок:

А. Нестационарные причины, характерные постепенным ростом $\gamma(t)$. К ним относится, например, износ формообразующего инструмента, смещающий центр распределения контролируемого признака.

Обычно причины этого типа порождают $q(\tau)$ в виде непрерывной случайной функции.

В. Стационарные причины, когда вероятность γ остается примерно постоянной при изготовлении любого изделия. Примером такой причины ([2], стр. 18—20) при обработке резанием является засорение (стружкой) базовых поверхностей приспособлений, которое одинаково вероятно как при изготовлении первого, так и при изготовлении последнего изделия партии; при обработке давлением — повреждения формообразующего инструмента (царапины и т. д.), связанные с неправильной установкой изделия или попаданием заготовки с неблагоприятными свойствами и т. д. В технической литературе ([2], стр. 18—20) эти причины принято называть «случайными».

Стационарные причины порождают вероятность q, которая либо остается примерно постоянной, либо скачкообразно растет в случайные моменты времени. Примерное постоянство вероятности q наблюдается, когда каждое следующее засорение, повреждение и т. д. приводит лишь к усугублению дефекта (например, к увеличению числа царапин на изделии при штамповке вытяжкой).

С. Постоянно действующие причины, вызывающие примерно постоянную для всего хода процесса вероятность q_0 появления дефектных изделий. Примером может служить несоответствие точности процесса обработки заданному допуску.

Естественно, что причины всех трех классов могут наблюдаться одновременно. Для задач приемочного контроля наибольшее значение имеют причины класса В. Это объясняется тем, что действие причин класса А легко парализуется профилактическими мероприятиями (профилактическая смена формообразующего инструмента и частей оборудования, профилактический контроль с предупредительными границами, автоматическая подналадка и т. д.), а причины класса С создают распределение X, близкое к биномиальному, при котором приемочный контроль имеет малую эффективность. Ниже рассматривается один из возможных случаев образования распределения X под воздействием стационарной причины (типа засорения базовых поверхностей приспособлений), причем делаются следующие предположения:

Изготавливаются партии изделий, каждая объемом N. При изготовлении любого изделия с вероятностью γ может возникнуть разладка, приводящая с постоянной вероятностью $q > 0$ к появлению дефектного изделия. Возникнув, разладка сама не исчезает. В процессе изготовления партии через равные промежутки времени производится профилактический контроль. Общее число изделий, подвергаемых контролю, мало по сравнению с объемом партии N (не более 0,05 N) и поэтому считается, что контроль производится мгновенно. С вероятностью $Q(q)$ контроль приводит к обнаружению разладки. При обнаружении разладки производится отладка процесса изготовления изделий и обеспечивается $q = 0$. Перед изготовлением каждой следующей партии процесс отлаживается с вероятностью, равной единице.

Предполагается, что точки контроля делят отрезок времени изготовления партии на k равных интервалов, и за каждый такой интервал времени изготавливается

$$m = \frac{N}{k} \tag{1}$$

изделий. Введем случайную величину

$$X_i = y_1^{(i)} + y_2^{(i)} + \ldots + y_m^{(i)}; \qquad i = \overline{1, k}, \tag{2}$$

где $y_j^{(i)} = 0$, если изделие годное, $y_j^{(i)} = 1$, если изделие дефектное. Положив

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \tag{3}$$

получим число дефектных изделий в партии. Число X образуется, как сумма величин, связанных в «почти» цепь Маркова. Действительно, если $X_{i-1} \geqslant 1$, то распространение X_i определяется однозначно. А именно,

$$\mathbf{P}\{X_i = m - n \mid X_{i-1} \geqslant 1\} = q^{m-n}\left([P(q) + \gamma Q(q)]\binom{m}{n} p^n + \right.$$

$$\left. + \gamma Q(q) \sum_{i=1}^{n} \binom{m-i}{n-i} (1-\gamma)^i p^{n-i}\right); \quad n < m \tag{4}$$

$$\mathbf{P}\{X_i = 0 \mid X_{i-1} \geqslant 1\} = p^m P(q) + \gamma Q(q) \sum_{i=0}^{m-1} (1-\gamma)^i p^{m-i} + Q(q)(1-\gamma)^m,$$

где

$$P(q) = 1 - Q(q), \tag{5}$$

$$p = 1 - q. \tag{6}$$

Однако при

$$X_{i-1} = 0 \tag{7}$$

нельзя однозначно определить $\mathbf{P}\{X_i = m - n \mid X_{i-1} = 0\}$, так как равенство (7) может иметь место как при наличии разладки (тогда справедливо (4)), так и при ее отсутствии

(тогда (4) несправедливо). Заметим, что величины, входящие в (3), образуют точно цепь Маркова, когда $q = 1$.

С тем, чтобы иметь возможность воспользоваться аппаратом цепей Маркова, введем сумму

$$Z_i = Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)} + \ldots + Z_m^{(i)};\ i = \overline{1, k}, \tag{8}$$

где $Z_j^{(i)} = 0$, если в момент изготовления изделия нет разладки и $Z_j^{(i)} = 1$, если в этот момент имеется разладка. Если положить

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_k, \tag{9}$$

то получим число изделий в партии, изготовленных при наличии разладки. Величины, входящие в (9), будут связаны в цепь Маркова, причем

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}\{Z_i = m - n \mid Z_{i-1} = 0\} = (1-\gamma)^n\gamma;\ m > n \geqslant 0 \\ &\mathbf{P}\{Z_i = 0 \mid Z_{i-1} = 0\} = (1-\gamma)^m, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}\{Z_i = m \mid Z_{i-1} \geqslant 1\} = P(q) + \gamma Q(q), \\ &\mathbf{P}\{Z_i = m - n \mid Z_{i-1} \geqslant 1\} = Q(q)(1-\gamma)^n\gamma;\ m > n > 0, \\ &\mathbf{P}\{Z_i = 0 \mid Z_{i-1} \geqslant 1\} = Q(q)(1-\gamma)^m. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Число X, определенное ранее равенством (3), может быть представлено как

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_Z, \tag{12}$$

где $x_i = 0$, если процесс находится в состоянии разладки и изделие годное; $x_i = 1$, если процесс находится в состоянии разладки и изделие дефектное. Согласно (12) число X является суммой случайного числа случайных величин и имеет сложное распределение. Слагаемые x_i имеют биноминальное распределение

$$\mathbf{P}\{x_i = 0\} = p,\ \mathbf{P}\{x_i = 1\} = q. \tag{13}$$

Матрица цепи $C_{m+1}(Z)$ имеет вид

$$\Pi_Z = \left\{\begin{array}{cccc} (1-\gamma)^m & (1-\gamma)^m\gamma & \ldots & (1-\gamma)\gamma & \gamma \\ Q(q)(1-\gamma)^m & Q(q)(1-\gamma)^m\gamma & \ldots & Q(q)(1-\gamma)\gamma & Q(q)\gamma + P(q) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ Q(q)(1-\gamma)^m & Q(q)(1-\gamma)^{m-1}\gamma & \ldots & Q(q)(1-\gamma)\gamma & Q(q)\gamma + P(q) \end{array}\right\} \tag{14}$$

и является неразложимой. Поэтому [3] пределом распределения величины Z будет нормальное распределение с плотностью

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z\sqrt{k}}\, e^{-\frac{[Z-ka_Z]^2}{2k\sigma_Z^2}}, \tag{15}$$

где a_Z, σ_Z определяются по известным формулам.

Учитывая (12), (13) не трудно убедиться [5], что пределом распределения величины X также будет нормальное распределение с параметрами

$$a_X = kqa_Z,\ \sigma_X^2 = k\,[q\sigma_Z^2 + pqa_Z]. \tag{16}$$

Некоторый интерес представляет случай *, когда в течение изготовления партии профилактический контроль не производится, но перед изготовлением следующей партии процесс изготовления отлаживается с вероятностью, равной единице.

Число дефектных изделий в партии может быть для этого случая представлено формулой (12), где Z имеет распределение

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}\{Z=0\}=(1-\gamma)^N,\\ &\mathbf{P}\{Z=n\}=\gamma(1-\gamma)^{N-n}; \qquad N>n>0,\\ &\mathbf{P}\{Z=N\}=\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Для случайной величины Z введем производящую функцию

$$P_Z(s)=(1-\gamma)^N+\gamma(1-\gamma)^{N-1}s+\ldots+\gamma(1-\gamma)^{N-n}\,s^n+\ldots+\gamma s^N. \tag{18}$$

Пользуясь теоремой ([4], стр. 228): производящая функция сложного распределения является сложной функцией, получим

$$P_X(s)=(1-\gamma)^N-\gamma(1-\gamma)^{N-1}(p+qs)\ldots+\gamma(p+qs)^N=$$

$$=(1-\gamma)^N+\gamma(p+qs)\,\frac{(p+qs)^N-(1-\gamma)^N}{p+qs+\gamma-1}. \tag{19}$$

Положим, что при $N\to\infty$ существуют пределы

$$\lim N\gamma=\lambda, \tag{20}$$

$$\lim\frac{q}{\gamma}=\varkappa. \tag{21}$$

Тогда для производящей функции $P_X(s)$ получим предельное выражение:

$$P_X(s)=\lim P_X(s)=e^{-\lambda}\left[1+\frac{1}{\varkappa-1-\varkappa s}\right]-\frac{e^{-\lambda\varkappa(1-s)}}{\varkappa-1-\varkappa s}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что при больших λ и небольших $\lambda\varkappa=\lambda^*$ производящая функция $P_X(s)$ приближается к производящей функции для распределения Пуассона. Соответственно при фиксированном γ с ростом N и существовании предела $\lim Nq=\lambda^*$ распределение случайной величины X будет сходиться к распределению Пуассона.

Пользуясь разложением выражения (22) в ряд по степеням s, получим формулы для вероятностей:

1) Случай, когда $\varkappa>1$,

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}\{X=0\}=\left[1+\frac{1}{\varkappa-1}\right]e^{-\lambda}-\frac{1}{\varkappa-1}\,e^{-\varkappa}\\ &\mathbf{P}\{X=n\}\frac{\varkappa^n}{(\varkappa-1)^{n-1}}\,e^{-\lambda}\,[1-R_{\lambda(\varkappa-1),\,n}]; \quad n>0 \end{aligned}\right\}: \tag{23}$$

где

$$R_{a,\,n}=\sum_{\nu=0}^{n}P_a(\nu), \quad p_a(\nu)=e^{-a}\,\frac{a^\nu}{\nu!}. \tag{24}$$

* Характерен для металлургических и быстротечных процессов.

2) Случай, когда $\varkappa = 1$,

$$\mathbf{P}\{X=0\} = p_\lambda(0) + P_\lambda(1),$$
$$\mathbf{P}\{X=n\} = p_\lambda(n+1); \qquad n>0. \tag{25}$$

3) Случай, когда $\varkappa < 1$,

$$\mathbf{P}\{X=0\} = \left[1-\frac{1}{1-\varkappa}\right] e^{-\lambda} + \frac{1}{1-\varkappa}\, e^{-\lambda\varkappa},$$
$$\mathbf{P}\{X=n\} = (-1)^n \frac{\varkappa^n}{(1-\varkappa)^{n+1}} \left[e^{-\lambda} - e^{-\lambda(1-2\varkappa)} L_{\lambda(1-\varkappa),n}\right], \tag{26}$$

где

$$L_{a,n} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^n P_a(\nu).$$

Выражения (23), (25), (26) задают разнообразные по асимметрии и эксцессу распределения.

Определенный интерес представляла бы разработка аппарата «универсальных» распределений, хорошо описывающих различные случаи действия стационарных причин.

Поступила в редакцию
16.1.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Михалевич, Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного контроля, Теория вероятн. и ее примен., I, вып. 4 (1956), 437—465.
[2] А. П. Владзиевский. Некоторые вопросы эксплуатации и проектирования автоматических станочных линий, Машгиз, 1953.
[3] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949.
[4] А. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИИЛ, 1953.
[5] A. Renyi, On the asymptotic distribution of the sum of random numer of independent random variables, Acta mathematica academiae scientiarum hungarical, VIII, 1—2 (1957), 193—200.

ON A DISTRIBUTION FOR THE NUMBER OF SPOILED ARTICLES IN SHIPMENTS

H. B. KORDONSKI (*LENINGRAD*)

(Summary)

The explicit form of a distribution for the number of spoiled articles in shipments is derived in this paper for one special type of problem in acceptance control.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том III И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 3*
1958

КРИТИКА и БИБЛИОГРАФИЯ

Р. Балльё. Теория вероятностей и статистический анализ (элементы) (R. Ballieu, Calcul des probabilites et analyse statistique (éléments)), Louvain, Librairie Universitaire, 1957, 225, стр. 1, литограф., (франц.).

Книга представляет собой введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Материал отобран весьма экономно. Главы, посвященные теории вероятностей (1—6), содержат, по существу, лишь сведения, необходимые для объяснения классических задач математической статистики (глава 7). Почти все примеры связаны с распределениями выборочных характеристик. Из предельных теорем приведены лишь теоремы Бернулли, Лапласа и Пуассона. Понятие характеристической функции отсутствует. Этим книга Балльё отличается от общеизвестных советских учебников и лекционных курсов, в которых всегда заметное место занимают предельные теоремы, случайные процессы и т. п. Вместе с тем, автором подробно разобраны вопросы, касающиеся многомерных распределений, в частности, нормальных распределений, которым посвящена отдельная глава. Изложение весьма четкое, вполне доступное для читателей, знакомых с основами анализа и линейной алгебры. Все существенные выводы подчеркнуты в тексте. Книгу в целом можно рассматривать как хороший конспект лекций и она, бесспорно, будет полезна тому кругу читателей, на который она рассчитана. По главам содержание распределено следующим образом:

Основные теоремы элементарной теории вероятности, случайные величины и их распределения, биномиальные вероятности, пуассоновское и нормальное приближение к ним, теорема Бернулли (главы 1—3). Многомерные распределения, техника действия с плотностями, корреляция и регрессия (главы 4, 5). Многомерные нормальные распределения, распределения квадратичных форм и отношений квадратичных форм от нормально распределенных случайных величин (глава 6). Общий обзор методов математической статистики (оценки, доверительные интервалы, критерии значимости). Доверительные интервалы для параметров нормального распределения, теория линейной к полиномиальной регрессии (глава 7).

Ю. В. Прохоров

Г. Рихтер. Теория вероятностей (H. Richter, Wahrscheinlichkeitstheorie), Berlin, Springer, 1956, 435 стр. (немецк.)

Книга вышла под номером 86 в известной серии «Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen».

Автор, как указывается во введении, ставил себе целью дать немецкому читателю руководство, изучение которого представляло бы основу для овладения различными областями современной теории вероятностей. Формально предполагается только знание анализа и линейной алгебры в объеме университетских программ, но требуется довольно высокий уровень развития математического мышления. В остальном книга построена как замкнутое целое. Теория меры и интегрирования, лежащая в основе современной теории вероятностей, излагается сжато, но со всеми доказательствами и в высшей степени отчетливо. Это последнее качество, кстати говоря, присуще и всей книге в целом и составляет одну из привлекательных ее сторон.

Собственно вероятностная часть по содержанию примерно соответствует известной монографии А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (ОНТИ 1936) плюс изложение теории характеристических функций, свойств наиболее интересных для приложений распределений и центральной предельной теоремы. Теория случайных процессов совсем не затрагивается, хотя необходимый математический аппарат, в форме распределений в бесконечных произведениях пространств, развивается.

Более подробно содержание книги можно охарактеризовать следующим образом.

Главы I (Теоретико-множественные основания) и IV (Элементы теории интегрирования) дают изложение абстрактной теории меры и интегрирования (включая теоремы о продолжении меры, Радона—Никодима, Колмогорова о мерах в бесконечных произведениях пространств). В качестве интересных особенностей следует отметить такие: а) процесс продолжения меры m осуществляется посредством «пополнения» метрического пространства, образованного множествами, на которых мера m первоначально была определена, с расстоянием $\rho(A, B)$, равным мере «симметрической разности» множеств A и B: $\rho(A, B) = m\{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}$; б) доказательство теоремы Радона — Никодима, исходящее из того, что плотность f меры μ' по отношению к мере μ (или ее произведение на постоянный множитель) максимизирует функционал $q(h) = \| h \|^{-1} \cdot \int h d\mu'$.

Главы II (Понятие вероятности) и III (Элементы теории вероятностей), занимающие по объему четверть книги (более ста страниц) представляются, в сравнении с другими частями книги, несколько растянутыми.

Глава V (Случайные величины на общих вероятностных полях) наряду с такими вопросами, как техника действия с плотностями, характеристические функции и сходимость распределений, содержит и более трудную теорию условных распределений и условных математических ожиданий. Здесь можно отметить, что при выводе теорем об однозначности и непрерывности соответствия между распределениями и характеристическими функциями систематически используется соотношение

$$\int C(\varkappa)\, dF_\xi(\varkappa) = \int c(t) f_\xi(t)\, dt,$$

где $C(\varkappa)$ — функция с абсолютно интегрируемым преобразованием Фурье

$$C(\varkappa) = \int e^{it\varkappa} c(t)\, dt,$$

а F_ξ и f_ξ — функция распределения и характеристическая функция случайной величины ξ. Это делает все изложение, по существу, более прозрачным (между прочим, это особенно ясно можно увидеть из недавней книги Бохнера) (Bochner S. Harmonic analysis and the theory of Probability, 1955).

Глава VI (Специальные распределения вероятностей) описывает наиболее употребительные распределения, включая распределения χ^2, Стьюдента (с многомерным обобщением, принадлежащим Хотеллингу) и F — закон Фишера.

Параграф, посвященный нормальному распределению, содержит, наряду с элементарными фактами, доказательство известной теоремы Крамера о разложении нормального закона и изложение результатов ленинградского математика В. Скитовича о характеризации нормального распределения условием независимости линейных форм.

В главе VII (Сходимость случайных величин) помещено как изложение в общем случае закономерностей, подобных принципу 0—1, простому и усиленному закону больших чисел, центральной предельной теореме, так и детальное изучение схемы Бернулли, включая доказательство закона повторного логарифма для этого случая. Каждый параграф книги заканчивается некоторым количеством довольно удачно подобранных задач.

Книгу нельзя рекомендовать в качестве первоначального учебника теории вероятностей, но она может быть полезна читателям (скажем, студентам — математикам старших курсов или аспирантам), уже изучавшим теорию вероятностей и желающим познакомиться с логически законченным изложением основ теории. Построение книги, как замкнутого целого, наличие в ней подробно проведенных доказательств и методически весьма продуманное расположение материала делают ее особенно пригодной для этой цели.

Ю. В. Прохоров

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора. Редакция просит в оформлении цитируемой литературы придерживаться порядка, принятого в журнале.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces. References to books and articles cited should conform to the standard adopted by the publishers.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Подписано к печати 10/X 1958 г. Формат бумаги 70×108$^1/_{16}$. Бум. л. 4$^1/_2$ Печ. л. 12,33
Уч. изд. 11,3 Тираж 2150 экз. Зак. 3201 Т-09936

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

Цена 11 р. 25 к. 2-26

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1959 год НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Названия журналов	Количество номеров в год	Годовая подписная цена
Общеакадемические журналы		
Вестник Академии наук СССР	12	96
Доклады Академии наук СССР (без папок)	36	518—40
Доклады Академии наук СССР (с 6 коленкоровыми папками с тиснением)	36	542—40
Известия Карельского и Кольского филиалов Академии наук СССР	4	28
Известия Сибирского отделения Академии наук СССР	12	84
Природа	12	84
Журналы по физико-математическим наукам		
Акустический журнал	4	48
Астрономический журнал	6	99
Атомная энергия	12	96
Атомная энергия (с 6 приложениями)	12	144
Журнал технической физики	12	126
Журнал экспериментальной и теоритической физики	12	288
Известия Академии наук СССР, серия геофизическая	12	126
Известия Академии наук СССР, серия математическая	6	90
Известия Академии наук СССР, серия физическая	12	144
Кристаллография	6	90
Математический сборник	12	144
Оптика и спектроскопия	12	162
Приборы и техника эксперимента	6	90
Теория вероятностей и ее применения	4	45
Успехи математических наук	6	96
Успехи физических наук	12	144
Физика металлов и металловедение	6	150
Журналы по химическим наукам		
Геохимия	8	72
Журнал аналитической химии	6	72
Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии	6	72
Журнал неорганической химии	12	270
Журнал общей химии	12	330
Журнал прикладной химии	12	225
Журнал физической химии	12	270
Известия Академии наук СССР, Отделение химических наук	12	180
Коллоидный журнал	6	72
Успехи химии	12	96
Журналы по техническим наукам		
Автоматика и телемеханика	12	135
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Серия: Проблемы металла и топлива	6	75
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Серия: Проблемы механики и машиностроения	6	75
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Серия: Проблемы энергетики, автоматики и электросвязи	6	75
Прикладная математика и механика	6	117
Радиотехника и электроника	12	165
Теплоэнергетика	12	96
Электричество	12	96

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ

городскими отделами «Союзпечать», конторами и отделениями связи, общественными уполномоченными на заводах и фабриках, в научно-исследовательских институтах, учебных заведениях, учреждениях и организациях. Подписка принимается также отделениями и магазинами *„Академкнига“* и отделом подписных изданий конторы *„Академкнига“* по адресу: *Москва, К—12, ул. Куйбышева, 8.*